Interpolación y Aproximación

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Obtener el polinomio de interpolación usando la fórmula de interpolación de Lagrange con la siguiente tabla de valores, e interpolar en el punto $x = -1$.

x_k	4	0	−6	1	−4
y_k	808	4	1438	10	160

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$4+2x^4+x-2x^2+5x^3$$

This can be entered as:

4+2*x^4+x-2*x^2+5*x^3

Solution:

Sabemos que la fórmula de interpolación de Lagrange para los n+1 puntos (x_i,y_i), $i=0,\ldots,n$, viene dada por: (ver por ejemplo el tutorial http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/lagrange.pdf)

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

Dados los puntos $(x_0,y_0) = (4,808)$, $(x_1,y_1) = (0,4)$, $(x_2,y_2) = (-6,1438)$, $(x_3,y_3) = (1,10)$, $(x_4,y_4) = (-4,160)$, tenemos entonces que los polinomios de Lagrange son los siguientes:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} = 1/960\ x\ (x+6)(x-1)(x+4) = 1/960\ x^4+3/320\ x^3+7/480\ x^2-1/40\ x$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} = 1/96\ (x-4)(x+6)(x-1)(x+4) = 1/96\ x^4+5/96\ x^3-11/48\ x^2-5/6\ x+1$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = 1/840\ (x-4)\ x\ (x-1)(x+4) = 1/840\ x^4-1/840\ x^3-2/105\ x^2+2/105\ x$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} = -1/105\ (x-4)\ x\ (x+6)(x+4) = -1/105\ x^4-2/35\ x^3+16/105\ x^2+32/35\ x$$

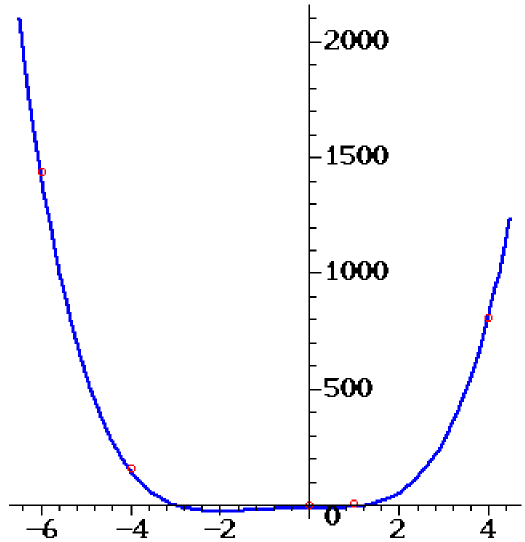
$$L_4(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = -1/320\ (x-4)\ x\ (x+6)(x-1) = -1/320\ x^4-1/320\ x^3+13/160\ x^2-3/40\ x$$

El polinomio solución es por tanto:

$$p(x) = \sum^{4} y_k L_k(x) = 808\ L_0(x)+4\ L_1(x)+1438\ L_2(x)+10\ L_3(x)+160\ L_4(x) = 4+2x^4+x-2x^2+5x^3$$

k=0

y la gráfica del polinomio de interpolación y de los puntos (x_i,y_i), $i=0,\ldots,4$ es la siguiente:



Si en lugar de obtener el polinomio de interpolación se quiere interpolar en un punto, o sea, se quiere calcular el valor del polinomio de interpolación en un punto concreto, basta sustituir la variable "x" de la fórmula por ese valor y realizar las operaciones correspondientes. En nuestro caso, si se quiere interpolar en el punto $x=-1$, usando alguna de las expresiones ya vistas para $L_k(x)$, obtenemos:

$L_0(-1) = 1/32$, $L_1(-1) = 25/16$, $L_2(-1) = -1/28$, $L_3(-1) = -5/7$, $L_4(-1) = 5/32$ y por tanto:

$$p(-1) = \sum_{k=0}^{4} y_k\, L_k(-1) = 808\, L_0(-1) + 4\, L_1(-1) + 1438\, L_2(-1) + 10\, L_3(-1) + 160\, L_4(-1) = -2$$

Si ya se tuviera el polinomio explícitamente tal como se ha calculado aquí, en potencias de x multiplicadas por sus coeficientes, es preferible utilizar el algoritmo de Ruffini-Horner para evaluar el polinomio en los puntos deseados, ya que entonces el coste es lineal (ver apuntes asignatura). En este caso, para obtener el valor en $x = -1$ del polinomio de interpolación $p(x) = 4+2x^4+x-2x^2+5x^3$ colocamos los coeficientes de mayor a menor exponente y operamos de la forma usual:

−1	2	5	−2	1	4
	2	3	−5	6	**−2**

o bien

$$p(-1) = (((2 \cdot (-1) + 5) \cdot (-1) - 2) \cdot (-1) + 1) \cdot (-1) + 4 = -2$$

obteniendo el mismo resultado que antes, $p(-1) = -2$, con muchas menos operaciones. Sabemos que con Ruffini-Horner a lo sumo son necesarios n productos y n sumas para obtener el valor de un polinomio de grado n. Claro que para llegar a este punto se han debido realizar antes todas las operaciones necesarias para obtener el polinomio en potencias de x.
¿cuántas sumas/restas y productos/divisiones son necesarias para obtener el polinomio final?

Mark summary:

Question	**Value**	**Your mark**
1	1.00	-