Interpolación y Aproximación

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Obtener el polinomio de interpolación usando la fórmula de interpolación de Lagrange con la siguiente tabla de valores, e interpolar en el punto x = 2.

x_k	5	−5	3	−1
y_k	−387	333	−83	−3

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$-2+3\,x-x^2-3\,x^3$$

This can be entered as:

-2+3*x-x^2-3*x^3

Solution:

Sabemos que la fórmula de interpolación de Lagrange para los n+1 puntos (x_i,y_i), i=0,...,n, viene dada por: (ver por ejemplo el tutorial http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/lagrange.pdf)

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} = \sum_{k=0}^{n} y_k\, L_k(x)$$

Dados los puntos (x_0,y_0) = (5,-387), (x_1,y_1) = (-5,333), (x_2,y_2) = (3,-83), (x_3,y_3) = (-1,-3), tenemos entonces que los polinomios de Lagrange son los siguientes:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = 1/120\,(x+5)(x-3)(x+1) = 1/120\,x^3+1/40\,x^2-13/120\,x-1/8$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = -1/320\,(x-5)(x-3)(x+1) = -1/320\,x^3+7/320\,x^2-7/320\,x-3/64$$

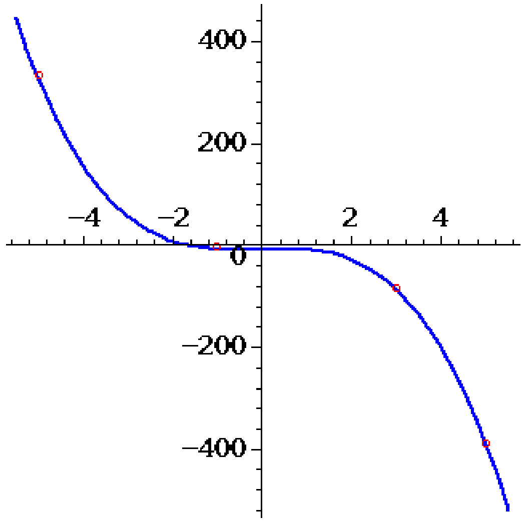
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = -1/64\,(x-5)(x+5)(x+1) = -1/64\,x^3-1/64\,x^2+25/64\,x+25/64$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = 1/96\,(x-5)(x+5)(x-3) = 1/96\,x^3-1/32\,x^2-25/96\,x+25/32$$

El polinomio solución es por tanto:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{3} y_k\, L_k(x) = -387\,L_0(x)+333\,L_1(x)-83\,L_2(x)-3\,L_3(x) = -2+3\,x-x^2-3\,x^3$$

y la gráfica del polinomio de interpolación y de los puntos (x_i,y_i), i=0,...,3 es la siguiente:



Si en lugar de obtener el polinomio de interpolación se quiere interpolar en un punto, o sea, se quiere calcular el valor del polinomio de interpolación en un punto concreto, basta sustituir la variable "x" de la fórmula por ese valor y realizar las operaciones correspondientes. En nuestro caso, si se quiere interpolar en el punto x=2, usando alguna de las expresiones ya vistas para $L_k(x)$, obtenemos:

$L_0(2) = -7/40$, $L_1(2) = -9/320$, $L_2(2) = 63/64$, $L_3(2) = 7/32$ y por tanto:

$$p(2) = \sum_{k=0}^{3} y_k\, L_k(2) = -387\, L_0(2) + 333\, L_1(2) - 83\, L_2(2) - 3\, L_3(2) = -24$$

Si ya se tuviera el polinomio explícitamente tal como se ha calculado aquí, en potencias de x multiplicadas por sus coeficientes, es preferible utilizar el algoritmo de Ruffini-Horner para evaluar el polinomio en los puntos deseados, ya que entonces el coste es lineal (ver apuntes asignatura). En este caso, para obtener el valor en x = 2 del polinomio de interpolación $p(x) = -2+3\,x-x^2-3\,x^3$ colocamos los coeficientes de mayor a menor exponente y operamos de la forma usual:

2	−3	−1	3	−2
	−3	−7	−11	**−24**

o bien

$$p(2) = ((-3\,.\,2-1)\,.\,2+3)\,.\,2-2 = -24$$

obteniendo el mismo resultado que antes, p(2) = −24, con muchas menos operaciones. Sabemos que con Ruffini-Horner a lo sumo son necesarios n productos y n sumas para obtener el valor de un polinomio de grado n. Claro que para llegar a este punto se han debido realizar antes todas las operaciones necesarias para obtener el polinomio en potencias de x.
¿cuántas sumas/restas y productos/divisiones son necesarias para obtener el polinomio final?

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.00	-
Total	1.00	0.00