Interpolación y Aproximación

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener el polinomio de interpolación usando la fórmula de interpolación de Lagrange con la siguiente tabla de valores, e interpolar en el punto x = 1.

x_k	3	2	−1
y_k	23	15	3

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$5+3\,x+x^2$$

This can be entered as:

5+3*x+x^2

Solution:

Sabemos que la fórmula de interpolación de Lagrange para los n+1 puntos (x_i,y_i), i=0,...,n, viene dada por: (ver por ejemplo el tutorial http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/lagrange.pdf)

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} = \sum_{k=0}^{n} y_k\, L_k(x)$$

Dados los puntos $(x_0,y_0) = (3,23)$, $(x_1,y_1) = (2,15)$, $(x_2,y_2) = (-1,3)$, tenemos entonces que los polinomios de Lagrange son los siguientes:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = 1/4\,(x-2)(x+1) = 1/4\,x^2-1/4\,x-1/2$$

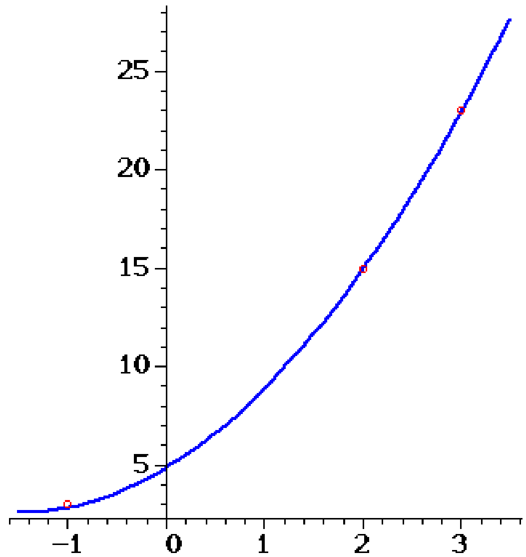
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -1/3\,(x-3)(x+1) = -1/3\,x^2+2/3\,x+1$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = 1/12\,(x-3)(x-2) = 1/12\,x^2-5/12\,x+1/2$$

El polinomio solución es por tanto:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{2} y_k\, L_k(x) = 23\,L_0(x)+15\,L_1(x)+3\,L_2(x) = 5+3\,x+x^2$$

y la gráfica del polinomio de interpolación y de los puntos (x_i,y_i), i=0,...,2 es la siguiente:



Si en lugar de obtener el polinomio de interpolación se quiere interpolar en un punto, o sea, se quiere calcular el valor del polinomio de interpolación en un punto concreto, basta sustituir la variable "x" de la fórmula por ese valor y realizar las operaciones correspondientes. En nuestro caso, si se quiere interpolar en el punto x=1, usando alguna de las expresiones ya vistas para $L_k(x)$, obtenemos:

$L_0(1) = -1/2$, $L_1(1) = 4/3$, $L_2(1) = 1/6$ y por tanto:

$$p(1) = \sum_{k=0}^{2} y_k L_k(1) = 23\, L_0(1)+15\, L_1(1) +3\, L_2(1) = 9$$

Si ya se tuviera el polinomio explícitamente tal como se ha calculado aquí, en potencias de x multiplicadas por sus coeficientes, es preferible utilizar el algoritmo de Ruffini-Horner para evaluar el polinomio en los puntos deseados, ya que entonces el coste es lineal (ver apuntes asignatura). En este caso, para obtener el valor en x = 1 del polinomio de interpolación $p(x) = 5+3\,x+x^2$ colocamos los coeficientes de mayor a menor exponente y operamos de la forma usual:

1	1	3	5
	1	4	**9**

o bien

$$p(1) = (1 \,.\, 1 +3) \,.\, 1 +5 \;= 9$$

obteniendo el mismo resultado que antes, p(1) = 9, con muchas menos operaciones. Sabemos que con Ruffini-Horner a lo sumo son necesarios n productos y n sumas para obtener el valor de un polinomio de grado n. Claro que para llegar a este punto se han debido realizar antes todas las operaciones necesarias para obtener el polinomio en potencias de x.
¿cuántas sumas/restas y productos/divisiones son necesarias para obtener el polinomio final?

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.00	-
Total	1.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.