

Interpolación y Aproximación

Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Obtener el polinomio de interpolación usando la fórmula de interpolación de Lagrange con la siguiente tabla de valores, e interpolar en el punto $x = -4$.

x_k	-6	6	-1
y_k	8	-16	-2

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$-4-2x$$

This can be entered as:

$$-4-2*x$$

Solution:

Sabemos que la fórmula de interpolación de Lagrange para los $n+1$ puntos (x_i, y_i) , $i=0, \dots, n$, viene dada por: (ver por ejemplo el tutorial <http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/lagrange.pdf>)

$$p(x) = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x-x_i}{x_k-x_i} = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x)$$

Dados los puntos $(x_0, y_0) = (-6, 8)$, $(x_1, y_1) = (6, -16)$, $(x_2, y_2) = (-1, -2)$, tenemos entonces que los polinomios de Lagrange son los siguientes:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-6)(x+1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = 1/60 x^2 - 1/12 x - 1/10$$

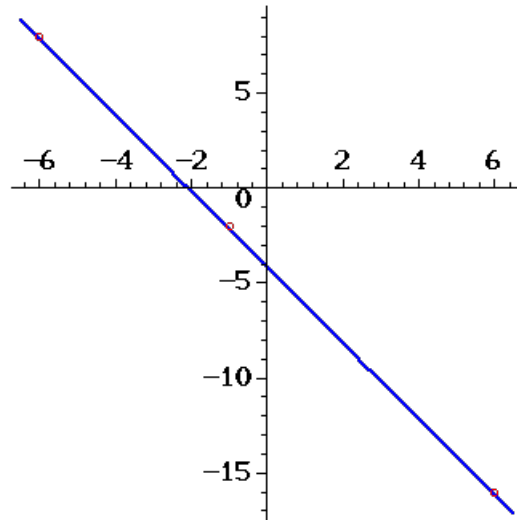
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+6)(x+1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = 1/84 x^2 + 1/12 x + 1/14$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+6)(x-6)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = -1/35 x^2 + 36/35$$

El polinomio solución es por tanto:

$$p(x) = \sum_{k=0}^2 y_k L_k(x) = 8 L_0(x) - 16 L_1(x) - 2 L_2(x) = -4 - 2x$$

y la gráfica del polinomio de interpolación y de los puntos (x_i, y_i) , $i=0, \dots, 2$ es la siguiente:



Si en lugar de obtener el polinomio de interpolación se quiere interpolar en un punto, o sea, se quiere calcular el valor del polinomio de interpolación en un punto concreto, basta sustituir la variable "x" de la fórmula por ese valor y realizar las operaciones correspondientes. En nuestro caso, si se quiere interpolar en el punto $x = -4$, usando alguna de las expresiones ya vistas para $L_k(x)$, obtenemos:

$$L_0(-4) = 1/2, \quad L_1(-4) = -1/14, \quad L_2(-4) = 4/7 \quad \text{y por tanto:}$$

$$p(-4) = \sum_{k=0}^2 y_k L_k(-4) = 8 L_0(-4) - 16 L_1(-4) - 2 L_2(-4) = 4$$

Si ya se tuviera el polinomio explícitamente tal como se ha calculado aquí, en potencias de x multiplicadas por sus coeficientes, es preferible utilizar el algoritmo de Ruffini-Horner para evaluar el polinomio en los puntos deseados, ya que entonces el coste es lineal (ver apuntes asignatura). En este caso, para obtener el valor en $x = -4$ del polinomio de interpolación $p(x) = -4 - 2x$ colocamos los coeficientes de mayor a menor exponente y operamos de la forma usual:

-4	-2	-4
	-2	4

o bien

$$p(-4) = -2 \cdot (-4) - 4 = 4$$

obteniendo el mismo resultado que antes, $p(-4) = 4$, con muchas menos operaciones. Sabemos que con Ruffini-Horner a lo sumo son necesarios n productos y n sumas para obtener el valor de un polinomio de grado n . Claro que para llegar a este punto se han debido realizar antes todas las operaciones necesarias para obtener el polinomio en potencias de x . ¿cuántas sumas/restas y productos/divisiones son necesarias para obtener el polinomio final?



(cc) Jesús García Quesada 2010

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.00	-
Total	1.00	0.00