# Interpolación y Aproximación

**Question 1**

Top 1 Bottom Focus Help

Obtener el polinomio de interpolación usando la fórmula de interpolación de Lagrange con la siguiente tabla de valores, e interpolar en el punto x = −3.

| $x_k$ | 1 | −4 | −7 |
|---|---|---|---|
| $y_k$ | 10 | 10 | 34 |

You have not attempted this yet

---

The teacher's answer was:

$$6+x^2+3\,x$$

This can be entered as:

6+x^2+3*x

---

**Solution:**

Sabemos que la fórmula de interpolación de Lagrange para los n+1 puntos $(x_i,y_i)$, i=0,...,n, viene dada por: (ver por ejemplo el tutorial http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/lagrange.pdf)

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} = \sum_{k=0}^{n} y_k\, L_k(x)$$

Dados los puntos $(x_0,y_0)$ = (1,10), $(x_1,y_1)$ = (-4,10), $(x_2,y_2)$ = (-7,34), tenemos entonces que los polinomios de Lagrange son los siguientes:

$$L_0(x) = \frac{(\,x-x_1\,)\,(\,x-x_2\,)}{(\,x_0-x_1\,)\,(\,x_0-x_2\,)} = 1/40\,(\,x+4\,)\,(\,x+7\,) = 1/40\,x^2+11/40\,x+7/10$$

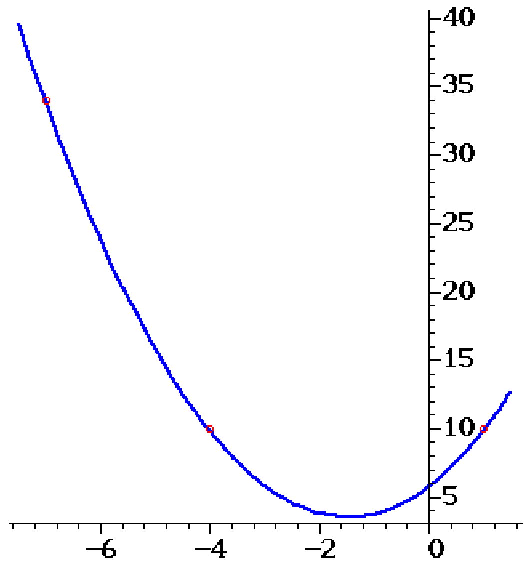
$$L_1(x) = \frac{(\,x-x_0\,)\,(\,x-x_2\,)}{(\,x_1-x_0\,)\,(\,x_1-x_2\,)} = -1/15\,(\,x-1\,)\,(\,x+7\,) = -1/15\,x^2-2/5\,x+7/15$$

$$L_2(x) = \frac{(\,x-x_0\,)\,(\,x-x_1\,)}{(\,x_2-x_0\,)\,(\,x_2-x_1\,)} = 1/24\,(\,x-1\,)\,(\,x+4\,) = 1/24\,x^2+1/8\,x-1/6$$

El polinomio solución es por tanto:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{2} y_k\, L_k(x) = 10\,L_0(x)+10\,L_1(x)+34\,L_2(x) = 6+x^2+3\,x$$

y la gráfica del polinomio de interpolación y de los puntos $(x_i,y_i)$, i=0,...,2 es la siguiente:




Si en lugar de obtener el polinomio de interpolación se quiere interpolar en un punto, o sea, se quiere calcular el valor del polinomio de interpolación en un punto concreto, basta sustituir la variable "x" de la fórmula por ese valor y realizar las operaciones correspondientes. En nuestro caso, si se quiere interpolar en el punto $x=-3$, usando alguna de las expresiones ya vistas para $L_k(x)$, obtenemos:

$L_0(-3) = 1/10$, $L_1(-3) = 16/15$, $L_2(-3) = -1/6$ y por tanto:

$$p(-3) = \sum_{k=0}^{2} y_k L_k(-3) = 10\ L_0(-3)+10\ L_1(-3) +34\ L_2(-3) = 6$$

Si ya se tuviera el polinomio explícitamente tal como se ha calculado aquí, en potencias de x multiplicadas por sus coeficientes, es preferible utilizar el algoritmo de Ruffini-Horner para evaluar el polinomio en los puntos deseados, ya que entonces el coste es lineal (ver apuntes asignatura). En este caso, para obtener el valor en $x = -3$ del polinomio de interpolación $p(x) = 6+x^2+3\ x$ colocamos los coeficientes de mayor a menor exponente y operamos de la forma usual:

| | | | |
|---|---|---|---|
| −3 | 1 | 3 | 6 |
| | 1 | 0 | **6** |

o bien

$$p(-3) = (1\ .\ (-3)\ +3)\ .\ (-3)\ +6\ = 6$$

obteniendo el mismo resultado que antes, $p(-3) = 6$, con muchas menos operaciones. Sabemos que con Ruffini-Horner a lo sumo son necesarios n productos y n sumas para obtener el valor de un polinomio de grado n. Claro que para llegar a este punto se han debido realizar antes todas las operaciones necesarias para obtener el polinomio en potencias de x.
¿cuántas sumas/restas y productos/divisiones son necesarias para obtener el polinomio final?



**Mark summary:**

| Question | Value | Your mark |
|---|---|---|
| 1 | 1.00 | - |
| Total | 1.00 | 0.00 |