Interpolación y Aproximación

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Obtener el polinomio de interpolación usando la fórmula de interpolación de Lagrange con la siguiente tabla de valores, e interpolar en el punto $x = -4$.

x_k	7	−6
y_k	30	−22

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$2+4\,x$$

This can be entered as:

2+4*x

Solution:

Sabemos que la fórmula de interpolación de Lagrange para los n+1 puntos (x_i,y_i), i=0,...,n, viene dada por: (ver por ejemplo el tutorial http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/lagrange.pdf)

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} = \sum_{k=0}^{n} y_k\, L_k(x)$$

Dados los puntos $(x_0,y_0) = (7,30)$, $(x_1,y_1) = (-6,-22)$, tenemos entonces que los polinomios de Lagrange son los siguientes:

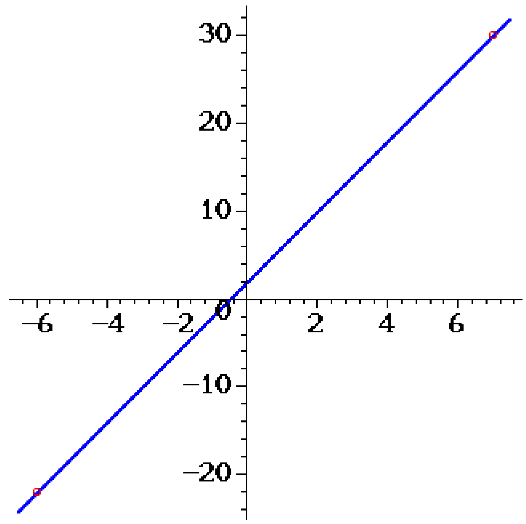
$$L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = 1/13\,x+6/13 = 1/13\,x+6/13$$

$$L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = -1/13\,x+7/13 = -1/13\,x+7/13$$

El polinomio solución es por tanto:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{1} y_k\, L_k(x) = 30\, L_0(x)-22\, L_1(x) = 2+4\,x$$

y la gráfica del polinomio de interpolación y de los puntos (x_i,y_i), i=0,...,1 es la siguiente:



Si en lugar de obtener el polinomio de interpolación se quiere interpolar en un punto, o sea, se quiere calcular el valor del polinomio de interpolación en un punto concreto, basta sustituir la variable "x" de la fórmula por ese valor y realizar las operaciones correspondientes. En nuestro caso, si se quiere interpolar en el punto $x=-4$, usando alguna de las expresiones ya vistas para $L_k(x)$, obtenemos:

$L_0(-4) = 2/13$, $L_1(-4) = 11/13$ y por tanto:

$$p(-4) = \sum_{k=0}^{1} y_k\, L_k(-4) = 30\, L_0(-4) - 22\, L_1(-4) = -14$$

Si ya se tuviera el polinomio explícitamente tal como se ha calculado aquí, en potencias de x multiplicadas por sus coeficientes, es preferible utilizar el algoritmo de Ruffini-Horner para evaluar el polinomio en los puntos deseados, ya que entonces el coste es lineal (ver apuntes asignatura). En este caso, para obtener el valor en $x = -4$ del polinomio de interpolación $p(x) = 2+4\,x$ colocamos los coeficientes de mayor a menor exponente y operamos de la forma usual:

−4	4	2
	4	**−14**

o bien

$$p(-4) = 4 \cdot (-4) + 2 = -14$$

obteniendo el mismo resultado que antes, $p(-4) = -14$, con muchas menos operaciones. Sabemos que con Ruffini-Horner a lo sumo son necesarios n productos y n sumas para obtener el valor de un polinomio de grado n. Claro que para llegar a este punto se han debido realizar antes todas las operaciones necesarias para obtener el polinomio en potencias de x.
¿cuántas sumas/restas y productos/divisiones son necesarias para obtener el polinomio final?

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.00	-
Total	1.00	0.00