Interpolación y Aproximación

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Se quiere aproximar la función $f(x) = 1/36\ [(\sqrt{6})/(x^{3/2})]$ en el intervalo [1,2] utilizando interpolación polinómica con 3 puntos elegidos de forma óptima en el intervalo ¿Cuál es el error máximo teórico que se cometería en el punto 1.6? ¿Y cuál el error *real*?
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.00264 & 0.000442 \end{bmatrix}$$

Solution:

Debemos obtener previamente las n=3 abscisas de Tchebychev en el intervalo [-1,1], según la ecuación

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\,\pi}{2n}\right), \quad k=0,1,\ldots,n-1$$

y los puntos son entonces: $[1/2\sqrt{3}, 0, -1/2\sqrt{3}]$ o bien x'=[0.866025404,0.0,−0.866025404]. Ahora hemos de pasar estos valores al intervalo [1, 2], para lo cual transformamos el intervalo [-1,1] en el [1, 2] mediante la aplicación biyectiva $\varphi: [-1,1] \to [1,2]$ tal que:

$$-1 \to 1$$

$$f[\ ,\ ] = \frac{2-1}{1+1} = 1/2$$

$$+1 \to 2$$

con lo cual la transformación es $\varphi(t)=1+1/2\,(t+1)=3/2+1/2\,t$, donde t varía en el intervalo [−1,1]. Los valores correspondientes en el intervalo [1,2] de las raices x_k' del polinomio de Tchebychev de grado 3 obtenidos anteriormente son : [1.933012702,1.5,1.66987298]
Por tanto, los puntos de interpolación son:

x_k	1.93301270	1.50000000	1.06698730
y_k	.25317512e-1	.37037034e-1	.61735393e-1

Sabemos que la fórmula que nos da una estimación conservadora del error de interpolación viene dada por: (ver http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/error_interp.pdf)

$$E = f(x)-p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

en la que se han considerado los n+1 puntos (x_k,y_k), k=0,...,n. En nuestro caso son 3 puntos, por lo que necesitamos calcular la derivada tercera de la función $f(x)=1/36\ [(\sqrt{6})/(x^{3/2})]$. Tenemos:

$$f^{(1)}(x) = -1/24\ [(\sqrt{6})/(x^{5/2})] \Rightarrow f^{(2)}(x) = 5/48\ [(\sqrt{6})/(x^{7/2})] \Rightarrow f^{(3)}(x) = -35/96\ [(\sqrt{6})/(x^{9/2})]$$

Esta última derivada tercera, considerada en valor absoluto, tiene su valor máximo en el intervalo [1,2] en el punto x = 1. con valor $35/96\sqrt{6}$ (comprobar). Por tanto, la cota de error viene dada por:

$$|E| \le \left|\frac{35/96\sqrt{6}}{3\,!}(1.6-1.933012702)(1.6-1.5)(1.6-1.66987298)\right| = 0.001078559028\sqrt{6} = 0.002641919276$$

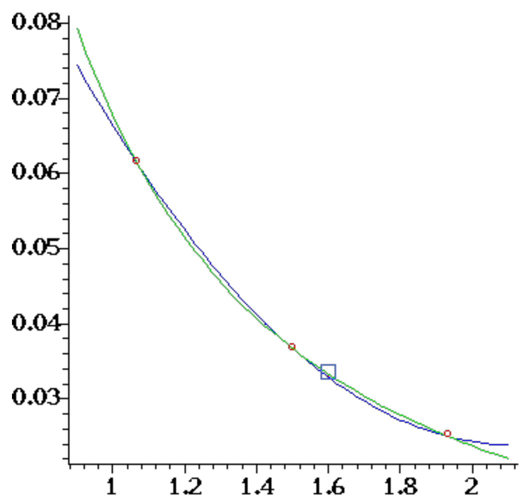
El error real es la diferencia entre el valor de la función en el punto dado,o sea, f(1.6), y el valor que nos proporciona el polinomio de interpolación, evaluado en el punto, o sea, p(1.6).
Con la tabla de valores del comienzo, podemos obtener el polinomio de interpolación y su valor en x=1.6. Como solo necesitamos conocer el valor p(1.6) podemos hacerlo por la fórmula de Newton en diferencias divididas y evaluar directamente para obtener que p(1.6) = 0.03317796. Si lo calculamos explícitamente, el polinomio resulta ser:

$$p(x) = 0.03461023198\,x^2 - 0.1458824427\,x + 0.1779876761$$

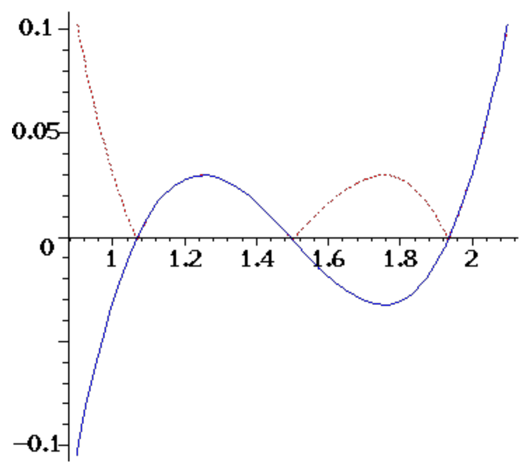
El error real es por tanto:

$$\text{Error real} = |f(1.6) - p(1.6)| = |0.033619643 - 0.03317796| = 0.000441683$$

A continuación aparecen las gráficas de la función $f(x)=1/36\ [(\sqrt{6})/(x^{3/2})]$ (verde), del polinomio de interpolación p(x) (azul) y de los puntos de interpolación (x_i,y_i), i=0...2 (rojo). También aparecen el punto donde se calcula el error y el segmento que representa el error real que se comete al interpolar, con un punteado en rojo, si la gráfica total lo permite.



Una cuestión más interesante es saber la cota del error en la totalidad del intervalo, independientemente de cuál sea el punto x en dicho intervalo, y considerando estos mismos puntos de interpolación. Para ello debemos encontrar una cota del producto $\prod_{i=0}^{n} (x-x_i)$ = | (x−1.933012702) (x−1.5) (x−1.66987298) | en el intervalo [1,2]. En la gráfica que sigue, se ha dibujado el producto $\prod(x-x_i)$ en color azul, y con trazo rojo, las correspondientes partes positivas de la gráfica anterior que son negativas, ya que el producto ha de ser considerado en valor absoluto, y por tanto, la gráfica a tener en cuenta queda en la región no negativa y > =0. Como se observa, los valores máximos se presentan en los puntos 1.249993333,1.250006667,2,1.749993333,1.750006667 donde la función $\prod(x-x_i)$ vale 0.03124999999 (comprobar)



Por tanto, la cota del error en todo el intervalo viene dada por:

$$|E_{max\ en\ [1,2]}| \le \frac{35/96\,\sqrt{6}}{3\,!} \max_{x \in [1,2]} |(x-1.933012702)(x-1.5)(x-1.66987298)| =$$

$$= 0.001898871527\,\sqrt{6} = 0.004651266329$$

Creative Commons License, Attribution-Noncommercial-No Derivative Works 3.0 (cc) Jesús García Quesada 2010

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-