Derivación e integración

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Obtener la integral por Romberg de la función $f(x) = x^2\cos(x)$ en el intervalo [1,3] dando el resultado con cuatro cifras decimales correctas. Entrar también con seis decimales correctos los valores solicitados de la tabla.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} -5.19 & -5.19 & -5.19 \end{bmatrix}$$

Solution:

Usando la fórmula trapezoidal con 2^k subintervalos

$$T_0{}^k = h\left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + \ldots + f_{2^{k-1}} + \frac{1}{2} f_{2^k}\right), \quad h = \frac{b-a}{2^k}, \quad f_i = f(x_i) \quad (2^k + 1 \text{ puntos }, k=0,1,2,\ldots)$$

que también podemos poner como

$$T_0{}^k = \frac{b-a}{2^{k+1}} (f_0 + 2\, f_1 + \ldots + 2\, f_{2^{k-1}} + f_{2^k})$$

Esta fórmula tiene como error de truncamiento una expresión del tipo

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i\, h^{2i},$$

por lo que es posible aplicar la extrapolación de Richardson a un conjunto de estimaciones realizadas con esta regla, y esto constituye el método de integración de Romberg. Las diferentes estimaciones las haremos subdividiendo el intervalo de integración por 2, por lo que la estimación $T_0{}^k$ que aparece anteriormente es la obtenida con 2^k aplicaciones de la regla del trapecio. Se ha visto que para calcular $T_0{}^k$ podemos utilizar el valor $T_0{}^{k-1}$ previamente calculado, de forma que solo necesitaríamos evaluar la función f en los 2^{k-1} puntos nuevos. Para obtener el resto de columnas aplicaremos la siguiente fórmula recurrente, tal como nos indica la fórmula general de la extrapolación de Richardson:

$$T_m{}^k = \frac{4^m \quad T_{m-1}{}^{k+1} - T_{m-1}{}^k}{4^m - 1} = T_{m-1}{}^{k+1} + \frac{T_{m-1}{}^{k+1} - T_{m-1}{}^k}{4^m - 1}, \quad \text{para } k=0,1,\ldots \quad m=1,2,\ldots$$

La tabla resultante es:

INTEGRACIÓN DE ROMBERG

h	$T_0{}^i$	$T_1{}^i$	$T_2{}^i$	$T_3{}^i$	$T_4{}^i$	$T_5{}^i$	$T_6{}^i$	$T_7{}^i$
2.00000000	**-8.36963016**							
1.00000000	-5.84940243	**-5.00932652**						
0.50000000	-5.34869566	-5.18179340	**-5.19329120**					
0.25000000	-5.23018609	-5.19068291	-5.19127554	**-5.19124354**				
0.12500000	-5.20095671	-5.19121358	-5.19124896	-5.19124853	**-5.19124855**			
0.06250000	-5.19367395	-5.19124637	-5.19124856	-5.19124855	-5.19124855	**-5.19124855**		
0.03125000	-5.19185480	-5.19124841	-5.19124855	-5.19124855	-5.19124855	-5.19124855	**-5.19124855**	
0.01562500	-5.19140011	-5.19124854	-5.19124855	-5.19124855	-5.19124855	-5.19124855	-5.19124855	**-5.19124855**

Siguiendo el mismo criterio que se ha usado para la extrapolación de Richardson en diferenciación numérica, la convergencia se produjo al calcular la linea 4, ya que $|T_4{}^4 - T_3{}^3| = |-5.1912485529307918643 - (-5.1912435449441932641)| = .50079865986002e-5 < .1e-3$

Romberg puede resultar costoso desde el punto de vista computacional si se quiere obtener una precisión alta, ya que el número de puntos a considerar se duplica entre dos estimaciones sucesivas por la regla trapezoidal. Sin embargo, tiene convergencia lineal, por lo que la mejora obtenida en la precisión de un dígito decimal a lo sumo no justifica el aumento del número de puntos en que es necesario evaluar la función a integrar. Como en cada nueva estimación se divide el paso h anterior por 2, los pasos h_n considerados en Romberg son:

$$h_0 = b-a, \quad h_1 = h_0/2, \quad h_2 = h_1/2 = h_0/4, \quad h_3 = h_2/2 = h_0/8, \quad h_4 = h_0/16, \quad h_5 = h_0/32 \text{ etc.}$$

Otra posible elección de los valores de h la ha propuesto R. Bulirsch (*Numerische Mathematik* **6**, 6-16, 1964):

$$h_0 = b-a, \quad h_1 = h_0/2, \quad h_2 = h_0/3, \quad h_3 = h_0/4, \quad h_4 = h_0/6, \quad h_5 = h_0/8, \quad h_6 = h_0/12, \quad h_7 = h_0/16, \quad \text{etc.}$$

que tiene la ventaja de que el cálculo requerido para obtener las estimaciones por la trapezoidal aumenta de forma más lenta. Los denominadores d_n de las $h_n = [(b-a)/(d_n)]$ (donde $d_n = 1,2,3,4,6,8,12,16,24, \ldots$) son los enteros de la forma 2^k y $3(2^k)$, de forma que todas las evaluaciones del integrando se usan en el cálculo de las sumas trapezoidales posteriores. Una implementación en Algol 60 se puede encontrar en Bulirsch-Stoer (*Numer. Math.* **9**, 271-278, 1967). J. Oliver (*Numer. Math.* **17**, 17-32, 1971) recomienda esta elección como óptima.

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.