Derivación e integración

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener la derivada segunda de la función f(x) = cos(3 x) en el punto 2.5 utilizando extrapolación de Richardson con la fórmula progresiva y comenzando con h=0.3. Dar el resultado con cuatro cifras decimales correctas. Entrar también con seis decimales correctos los valores solicitados de la tabla.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} -3.12 & -3.12 & -3.12 \end{bmatrix}$$

Solution:
Para estimar la derivada segunda usando tres puntos conocemos las fórmulas:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, h^{2i} \text{ (fórmula central, con error de truncamiento de la forma } h^{2i}\text{)}$$

y también:

$$f''(x) = \frac{f(x+2\,h) - 2\,f(x+h) + f(x)}{h^2} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i\, h^{i} \text{ (fórmula progresiva, con error de truncamiento de la forma } h^{i}\text{)}$$

y considerando la forma que tienen los errores de truncamiento de estas fórmulas que aproximan la derivada, podemos construir una tabla cuya primera columna $T_0^{\,i}$ (i=0,1,...) se obtiene utilizando la primera fórmula o la segunda para diferentes h, y el resto de las columnas se pueden generar con la recurrencia:

$$T_k^{\,i} = \frac{(h_i/h_{i+k})^{\beta}\;\; T_{k-1}^{\,i+1} - T_{k-1}^{\,i}}{(h_i/h_{i+k})^{\beta} - 1} = T_{k-1}^{\,i+1} + \frac{T_{k-1}^{\,i+1} - T_{k-1}^{\,i}}{(h_i/h_{i+k})^{\beta} - 1}, \quad \text{para k=1,2, ...(columna),} \quad \text{i=1,2, ...(fila)}$$

siendo β = 2,1 respectivamente. Si es $h_0 = h$ y $h_{i+1}=h_i/2 \quad \forall i \geq 0 \Rightarrow h_i/h_{i+k} = 2^k$ y resultan las conocidas fórmulas:

$$T_k^{\,i} = \frac{4^k\;\; T_{k-1}^{\,i+1} - T_{k-1}^{\,i}}{4^k - 1} = T_{k-1}^{\,i+1} + \frac{T_{k-1}^{\,i+1} - T_{k-1}^{\,i}}{4^k - 1}, \text{ o bien } \quad T_k^{\,i} = \frac{2^k\;\; T_{k-1}^{\,i+1} - T_{k-1}^{\,i}}{2^k - 1} = T_{k-1}^{\,i+1} + \frac{T_{k-1}^{\,i+1} - T_{k-1}^{\,i}}{2^k - 1}$$

para las fórmulas central (β = 2) y progresiva (β = 1), respectivamente.

La tabla resultante en este caso es:

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON								
h	$T_0^{\,i}$	$T_1^{\,i}$	$T_2^{\,i}$	$T_3^{\,i}$	$T_4^{\,i}$	$T_5^{\,i}$	$T_6^{\,i}$	$T_7^{\,i}$
0.30000000	**4.36652556**							
0.15000000	0.84837558	**-2.66977441**						
7.500000e-02	-1.15274325	-3.15386208	**-3.31522464**					
3.750000e-02	-2.15000477	-3.14726629	-3.14506769	**-3.12075956**				
1.875000e-02	-2.63947549	-3.12894621	-3.12283952	-3.11966407	**-3.11959104**			
9.375000e-03	-2.88089422	-3.12231294	-3.12010185	-3.11971075	-3.11971386	**-3.11971782**		
4.687500e-03	-3.00064824	-3.12040226	-3.11976537	-3.11971730	-3.11971774	-3.11971786	**-3.11971786**	
2.343750e-03	-3.06027081	-3.11989339	-3.11972377	-3.11971782	-3.11971786	-3.11971786	-3.11971786	**-3.11971786**

Siguiendo un criterio conservador para establecer la convergencia, esta se produjo al calcular la linea 6, ya que $|T_6^{\,6} - T_5^{\,5}|$=|-3.1197178633605569062 - (-3.1197178239480781234)| = .394124787828e-7 < .1e-3

Esta tabla se ha construido partiendo del valor inicial h_0 = h y obteniendo los siguientes h_i multiplicando el valor

inmediatamente anterior por 1/2. Por tanto, las h_i consideradas resultan de multiplicar h por los elementos del vector [1,1/2,1/4,1/8,1/16,1/32,1/64,1/128].
Sin embargo, es posible considerar otras alternativas y tomar dos (o más) números diferentes, p.e., [1/2,3/4] para generar otro vector [1,1/2,3/8,3/16,9/64,9/128,[27/512],[27/1024]] y obtener una tabla que en general converge más rápidamente como la siguiente. Es necesario utilizar la fórmula general que aparece en primer lugar.

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.30000000	**4.36652556**							
0.15000000	0.84837558	**-2.66977441**						
0.11250000	-0.14692537	-3.13282820	**-3.41066048**					
5.625000e-02	-1.65363814	-3.16035090	-3.17686452	**-3.12291161**				
4.218750e-02	-2.02646761	-3.14495601	-3.13571908	-3.11961869	**-3.11907985**			
2.109375e-02	-2.57874892	-3.13103023	-3.12267475	-3.11966453	-3.11967203	**-3.11971681**		
1.582031e-02	-2.71518032	-3.12447455	-3.12054114	-3.11970624	-3.11971307	-3.11971791	**-3.11971797**	
7.910156e-03	-2.91838872	-3.12159712	-3.11987067	-3.11971594	-3.11971753	-3.11971787	-3.11971786	**-3.11971786**

En este caso, la convergencia se produjo al calcular la linea 6, ya que $|T_6^6-T_5^5|=|-3.1197179697148959661 - (-3.1197168130874109627)| = .11566274850034e-5 < .1e-3$

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.