Derivación e integración

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener la derivada segunda de la función $f(x) = e^{-4x}$ en el punto 0.5 utilizando extrapolación de Richardson con la fórmula central y comenzando con h=0.8. Dar el resultado con cuatro cifras decimales correctas. Entrar también con seis decimales correctos los valores solicitados de la tabla.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 2.17 & 2.17 & 2.17 \end{bmatrix}$$

Solution:
Para estimar la derivada segunda usando tres puntos conocemos las fórmulas:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, h^{2i} \text{ (fórmula central, con error de truncamiento de la forma } h^{2i}\text{)}$$

y también:

$$f''(x) = \frac{f(x+2\,h) - 2\,f(x+h) + f(x)}{h^2} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i\, h^{i} \text{ (fórmula progresiva, con error de truncamiento de la forma } h^{i}\text{)}$$

y considerando la forma que tienen los errores de truncamiento de estas fórmulas que aproximan la derivada, podemos construir una tabla cuya primera columna $T_0^{\,i}$ (i=0,1,...) se obtiene utilizando la primera fórmula o la segunda para diferentes h, y el resto de las columnas se pueden generar con la recurrencia:

$$T_k^{\,i} = \frac{(h_i/h_{i+k})^{\beta}\;\; T_{k-1}^{\,i+1} - T_{k-1}^{\,i}}{(h_i/h_{i+k})^{\beta} - 1} = T_{k-1}^{\,i+1} + \frac{T_{k-1}^{\,i+1} - T_{k-1}^{\,i}}{(h_i/h_{i+k})^{\beta} - 1}, \quad \text{para k=1,2, ...(columna),} \quad \text{i=1,2, ...(fila)}$$

siendo β = 2,1 respectivamente. Si es $h_0 = h$ y $h_{i+1}=h_i/2 \quad \forall i \ge 0 \Rightarrow h_i/h_{i+k} = 2^k$ y resultan las conocidas fórmulas:

$$T_k^{\,i} = \frac{4^k\;\; T_{k-1}^{\,i+1} - T_{k-1}^{\,i}}{4^k - 1} = T_{k-1}^{\,i+1} + \frac{T_{k-1}^{\,i+1} - T_{k-1}^{\,i}}{4^k - 1}, \text{ o bien } \quad T_k^{\,i} = \frac{2^k\;\; T_{k-1}^{\,i+1} - T_{k-1}^{\,i}}{2^k - 1} = T_{k-1}^{\,i+1} + \frac{T_{k-1}^{\,i+1} - T_{k-1}^{\,i}}{2^k - 1}$$

para las fórmulas central (β = 2) y progresiva (β = 1), respectivamente.

La tabla resultante en este caso es:

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON								
h	$T_0^{\,i}$	$T_1^{\,i}$	$T_2^{\,i}$	$T_3^{\,i}$	$T_4^{\,i}$	$T_5^{\,i}$	$T_6^{\,i}$	$T_7^{\,i}$
0.80000000	**4.77337956**							
0.40000000	2.66858251	**1.96698350**						
0.20000000	2.28334270	2.15492943	**2.16745916**					
0.10000000	2.19439048	2.16473974	2.16539376	**2.16536098**				
5.000000e-02	2.17259204	2.16532590	2.16536498	2.16536452	**2.16536453**			
2.500000e-02	2.16716960	2.16536212	2.16536454	2.16536453	2.16536453	**2.16536453**		
1.250000e-02	2.16581569	2.16536438	2.16536453	2.16536453	2.16536453	2.16536453	**2.16536453**	
6.250000e-03	2.16547731	2.16536452	2.16536453	2.16536453	2.16536453	2.16536453	2.16536453	**2.16536453**

Siguiendo un criterio conservador para establecer la convergencia, esta se produjo al calcular la linea 4, ya que $|T_4^{\,4}-T_3^{\,3}|=|2.1653645328327717094 - (2.1653609774446861908)| = .35553880855186e\text{-}5 < .1e\text{-}3$

Esta tabla se ha construido partiendo del valor inicial $h_0 = h$ y obteniendo los siguientes h_i multiplicando el valor inmediatamente anterior por 1/2. Por tanto, las h_i consideradas resultan de multiplicar h por los elementos del vector [1,1/2,1/4,1/8,1/16,1/32,1/64,1/128].
Sin embargo, es posible considerar otras alternativas y tomar dos (o más) números diferentes, p.e., [1/4,1/5] para generar otro vector [1,1/4,1/20,1/80,1/400,1/1600,[1/8000],[1/32000]] y obtener una tabla que en general converge más rápidamente como la siguiente. Es necesario utilizar la fórmula general que aparece en primer lugar.

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON								
h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.80000000	**4.77337956**							
0.20000000	2.28334270	**2.11734024**						
4.000000e-02	2.16998792	2.16526480	**2.16538492**					
1.000000e-02	2.16565326	2.16536429	2.16536453	**2.16536453**				
2.000000e-03	2.16537608	2.16536453	2.16536453	2.16536453	**2.16536453**			
5.000000e-04	2.16536525	2.16536453	2.16536453	2.16536453	2.16536453	**2.16536453**		
1.000000e-04	2.16536456	2.16536453	2.16536453	2.16536453	2.16536453	2.16536453	**2.16536453**	
2.500000e-05	2.16536453	2.16536453	2.16536453	2.16536453	2.16536453	2.16536453	2.16536453	**2.16536453**

En este caso, la convergencia se produjo al calcular la linea 3, ya que $|T_3^3-T_2^2|=|2.16536453143741100091 - (2.16538491562083890 95)| = .203841834279004e-4 < .1e-3$

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.