Derivación e integración

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener la derivada primera de la función $f(x) = x^{-1}$ en el punto -0.9 utilizando extrapolación de Richardson con la fórmula central y comenzando con h=0.5. Dar el resultado con cuatro cifras decimales correctas. Entrar también con seis decimales correctos los valores solicitados de la tabla.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} -1.23 & -1.23 & -1.23 \end{bmatrix}$$

Solution:
Para estimar la derivada primera usando dos puntos conocemos las fórmulas:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i h^{2i}$$ (fórmula central, con error de truncamiento de la forma h^{2i})

y también:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i h^{i}$$ (fórmula progresiva, con error de truncamiento de la forma h^{i})

y considerando la forma que tienen los errores de truncamiento de estas fórmulas que aproximan la derivada, podemos construir una tabla cuya primera columna $T_0{}^i$ (i=0,1,...) se obtiene utilizando la primera fórmula o la segunda para diferentes h, y el resto de las columnas se pueden generar con la recurrencia:

$$T_k{}^i = \frac{(h_i/h_{i+k})^\beta \quad T_{k-1}{}^{i+1} - T_{k-1}{}^i}{(h_i/h_{i+k})^\beta - 1} = T_{k-1}{}^{i+1} + \frac{T_{k-1}{}^{i+1} - T_{k-1}{}^i}{(h_i/h_{i+k})^\beta - 1},$$ para k=1,2, ...(columna), i=1,2, ...(fila)

siendo $\beta = 2,1$ respectivamente. Si es $h_0 = h$ y $h_{i+1}=h_i/2 \quad \forall i \geq 0 \Rightarrow h_i/h_{i+k} = 2^k$ y resultan las conocidas fórmulas:

$$T_k{}^i = \frac{4^k \quad T_{k-1}{}^{i+1} - T_{k-1}{}^i}{4^k - 1} = T_{k-1}{}^{i+1} + \frac{T_{k-1}{}^{i+1} - T_{k-1}{}^i}{4^k - 1}, \text{ o bien } \quad T_k{}^i = \frac{2^k \quad T_{k-1}{}^{i+1} - T_{k-1}{}^i}{2^k - 1} = T_{k-1}{}^{i+1} + \frac{T_{k-1}{}^{i+1} - T_{k-1}{}^i}{2^k - 1}$$

para las fórmulas central ($\beta = 2$) y progresiva ($\beta = 1$), respectivamente.

La tabla resultante en este caso es:

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON								
h	$T_0{}^i$	$T_1{}^i$	$T_2{}^i$	$T_3{}^i$	$T_4{}^i$	$T_5{}^i$	$T_6{}^i$	$T_7{}^i$
0.50000000	**-1.78571429**							
0.25000000	-1.33779264	**-1.18848543**						
0.12500000	-1.25885130	-1.23253752	**-1.23547432**					
6.250000e-02	-1.24055049	-1.23445023	-1.23457774	**-1.23456351**				
3.125000e-02	-1.23605813	-1.23456068	-1.23456804	-1.23456789	**-1.23456791**			
1.562500e-02	-1.23494012	-1.23456745	-1.23456790	-1.23456790	-1.23456790	**-1.23456790**		
7.812500e-03	-1.23466094	-1.23456787	-1.23456790	-1.23456790	-1.23456790	-1.23456790	**-1.23456790**	
3.906250e-03	-1.23459116	-1.23456790	-1.23456790	-1.23456790	-1.23456790	-1.23456790	-1.23456790	**-1.23456790**

Siguiendo un criterio conservador para establecer la convergencia, esta se produjo al calcular la linea 4, ya que
$|T_4{}^4-T_3{}^3|=|-1.2345679065366159851 - (-1.2345635088058527063)| = .43977307632788e-5 < .1e-3$

Esta tabla se ha construido partiendo del valor inicial h_0 = h y obteniendo los siguientes h_i multiplicando el valor inmediatamente anterior por 1/2. Por tanto, las h_i consideradas resultan de multiplicar h por los elementos del vector [1,1/2,1/4,1/8,1/16,1/32,1/64,1/128].
Sin embargo, es posible considerar otras alternativas y tomar dos (o más) números diferentes, p.e., [1/6,2/3] para generar otro vector [1,1/6,1/9,1/54,1/81,1/486,1/729,1/4374] y obtener una tabla que en general converge más rápidamente como la siguiente. Es necesario utilizar la fórmula general que aparece en primer lugar.

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.50000000	**-1.78571429**							
8.333333e-02	-1.24524386	**-1.22980185**						
5.555556e-02	-1.23929009	-1.23452707	**-1.23458613**					
9.259259e-03	-1.23469859	-1.23456740	-1.23456791	**-1.23456790**				
6.172840e-03	-1.23462598	-1.23456790	-1.23456790	-1.23456790	**-1.23456790**			
1.028807e-03	-1.23456951	-1.23456790	-1.23456790	-1.23456790	-1.23456790	**-1.23456790**		
6.858711e-04	-1.23456862	-1.23456790	-1.23456790	-1.23456790	-1.23456790	-1.23456790	**-1.23456790**	
1.143118e-04	-1.23456792	-1.23456790	-1.23456790	-1.23456790	-1.23456790	-1.23456790	-1.23456790	**-1.23456790**

En este caso, la convergencia se produjo al calcular la linea 3, ya que $|T_3^3-T_2^2|$=|-1.2345678993048212951 - (-1.2345861312419675080)| = .182319371462129e-4 < .1e-3

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.