Derivación e integración

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener la derivada segunda de la función f(x) = sin(x) cos(x) en el punto 3 utilizando extrapolación de Richardson con la fórmula progresiva y comenzando con h=0.1. Dar el resultado con cuatro cifras decimales correctas. Entrar también con seis decimales correctos los valores solicitados de la tabla.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.559 & 0.559 & 0.559 \end{bmatrix}$$

Solution:
Para estimar la derivada segunda usando tres puntos conocemos las fórmulas:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, h^{2i} \text{ (fórmula central, con error de truncamiento de la forma } h^{2i}\text{)}$$

y también:

$$f''(x) = \frac{f(x+2\,h) - 2\,f(x+h) + f(x)}{h^2} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i\, h^{i} \text{ (fórmula progresiva, con error de truncamiento de la forma } h^{i}\text{)}$$

y considerando la forma que tienen los errores de truncamiento de estas fórmulas que aproximan la derivada, podemos construir una tabla cuya primera columna $T_0^{\,i}$ (i=0,1,...) se obtiene utilizando la primera fórmula o la segunda para diferentes h, y el resto de las columnas se pueden generar con la recurrencia:

$$T_k^{\,i} = \frac{(h_i/h_{i+k})^{\beta}\ \ T_{k-1}^{\,i+1} - T_{k-1}^{\,i}}{(h_i/h_{i+k})^{\beta} - 1} = T_{k-1}^{\,i+1} + \frac{T_{k-1}^{\,i+1} - T_{k-1}^{\,i}}{(h_i/h_{i+k})^{\beta} - 1}, \quad \text{para } k=1,2,\ldots\text{(columna)}, \quad i=1,2,\ldots\text{(fila)}$$

siendo $\beta = 2,1$ respectivamente. Si es $h_0 = h$ y $h_{i+1}=h_i/2 \quad \forall i \geq 0 \Rightarrow h_i/h_{i+k} = 2^k$ y resultan las conocidas fórmulas:

$$T_k^{\,i} = \frac{4^k\ \ T_{k-1}^{\,i+1} - T_{k-1}^{\,i}}{4^k - 1} = T_{k-1}^{\,i+1} + \frac{T_{k-1}^{\,i+1} - T_{k-1}^{\,i}}{4^k - 1}, \text{ o bien } \quad T_k^{\,i} = \frac{2^k\ \ T_{k-1}^{\,i+1} - T_{k-1}^{\,i}}{2^k - 1} = T_{k-1}^{\,i+1} + \frac{T_{k-1}^{\,i+1} - T_{k-1}^{\,i}}{2^k - 1}$$

para las fórmulas central ($\beta = 2$) y progresiva ($\beta = 1$), respectivamente.

La tabla resultante en este caso es:

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

h	$T_0^{\,i}$	$T_1^{\,i}$	$T_2^{\,i}$	$T_3^{\,i}$	$T_4^{\,i}$	$T_5^{\,i}$	$T_6^{\,i}$	$T_7^{\,i}$
0.10000000	**0.16562561**							
5.000000e-02	0.36402151	**0.56241740**						
2.500000e-02	0.46205930	0.56009710	**0.55932367**					
1.250000e-02	0.51062626	0.55919322	0.55889193	**0.55883025**				
6.250000e-03	0.53477674	0.55892722	0.55883856	0.55883094	**0.55883098**			
3.125000e-03	0.54681625	0.55885576	0.55883194	0.55883099	0.55883100	**0.55883100**		
1.562500e-03	0.55282676	0.55883728	0.55883111	0.55883100	0.55883100	0.55883100	**0.55883100**	
7.812500e-04	0.55582967	0.55883258	0.55883101	0.55883100	0.55883100	0.55883100	0.55883100	**0.55883100**

Siguiendo un criterio conservador para establecer la convergencia, esta se produjo al calcular la linea 4, ya que $|T_4^{\,4}-T_3^{\,3}|=|.55883098105566354247 - (.55883025047824195000)| = .73057742159247e-6 < .1e-3$

Esta tabla se ha construido partiendo del valor inicial $h_0 = h$ y obteniendo los siguientes h_i multiplicando el valor

inmediatamente anterior por 1/2. Por tanto, las h_i consideradas resultan de multiplicar h por los elementos del vector [1,1/2,1/4,1/8,1/16,1/32,1/64,1/128].
Sin embargo, es posible considerar otras alternativas y tomar dos (o más) números diferentes, p.e., [1/2,1/4] para generar otro vector [1,1/2,1/8,1/16,1/64,1/128,1/512,1/1024] y obtener una tabla que en general converge más rápidamente como la siguiente. Es necesario utilizar la fórmula general que aparece en primer lugar.

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.10000000	**0.16562561**							
5.000000e-02	0.36402151	**0.56241740**						
1.250000e-02	0.51062626	0.55949451	**0.55907696**					
6.250000e-03	0.53477674	0.55892722	0.55884618	**0.55883080**				
1.562500e-03	0.55282676	0.55884344	0.55883147	0.55883099	**0.55883100**			
7.812500e-04	0.55582967	0.55883258	0.55883103	0.55883100	0.55883100	**0.55883100**		
1.953125e-04	0.55808081	0.55883119	0.55883100	0.55883100	0.55883100	0.55883100	**0.55883100**	
9.765625e-05	0.55845592	0.55883102	0.55883100	0.55883100	0.55883100	0.55883100	0.55883100	**0.55883100**

En este caso, la convergencia se produjo al calcular la linea 4, ya que $|T_4^4-T_3^3|=|.55883099544122036087 - (.55883079841130814436)| = .19702991221651e-6 < .1e-3$

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.