Derivación e integración

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener la derivada primera de la función $f(x) = x^{1/2}$ en el punto 0.4 utilizando extrapolación de Richardson con la fórmula progresiva y comenzando con h=0.6. Dar el resultado con cuatro cifras decimales correctas. Entrar también con seis decimales correctos los valores solicitados de la tabla.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.789 & 0.790 & 0.791 \end{bmatrix}$$

Solution:
Para estimar la derivada primera usando dos puntos conocemos las fórmulas:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, h^{2i} \text{ (fórmula central, con error de truncamiento de la forma } h^{2i}\text{)}$$

y también:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i\, h^{i} \text{ (fórmula progresiva, con error de truncamiento de la forma } h^{i}\text{)}$$

y considerando la forma que tienen los errores de truncamiento de estas fórmulas que aproximan la derivada, podemos construir una tabla cuya primera columna T_0^i (i=0,1,...) se obtiene utilizando la primera fórmula o la segunda para diferentes h, y el resto de las columnas se pueden generar con la recurrencia:

$$T_k^i = \frac{(h_i/h_{i+k})^{\beta}\; T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{(h_i/h_{i+k})^{\beta} - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{(h_i/h_{i+k})^{\beta} - 1}, \quad \text{para } k=1,2,\ldots\text{(columna)}, \quad i=1,2,\ldots\text{(fila)}$$

siendo $\beta = 2,1$ respectivamente. Si es $h_0 = h$ y $h_{i+1}=h_i/2 \quad \forall i \geq 0 \Rightarrow h_i/h_{i+k} = 2^k$ y resultan las conocidas fórmulas:

$$T_k^i = \frac{4^k\; T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{4^k - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{4^k - 1}, \text{ o bien } \quad T_k^i = \frac{2^k\; T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{2^k - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{2^k - 1}$$

para las fórmulas central ($\beta = 2$) y progresiva ($\beta = 1$), respectivamente.

La tabla resultante en este caso es:

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.60000000	**0.61257411**							
0.30000000	0.68068165	**0.74878918**						
0.15000000	0.72776211	0.77484257	**0.78352704**					
7.500000e-02	0.75662541	0.78548870	0.78903741	**0.78982461**				
3.750000e-02	0.77286122	0.78909703	0.79029981	0.79048015	**0.79052385**			
1.875000e-02	0.78151591	0.79017059	0.79052845	0.79056111	0.79056651	**0.79056788**		
9.375000e-03	0.78599067	0.79046544	0.79056372	0.79056876	0.79056927	0.79056936	**0.79056939**	
4.687500e-03	0.78826677	0.79054286	0.79056866	0.79056937	0.79056941	0.79056941	0.79056941	**0.79056941**

Siguiendo un criterio conservador para establecer la convergencia, esta se produjo al calcular la linea 5, ya que $|T_5^5 - T_4^4| = |.79056788318424617923 - (.79052385170234276107)| = .4403148190341816e\text{-}4 < .1e\text{-}3$

Esta tabla se ha construido partiendo del valor inicial h_0 = h y obteniendo los siguientes h_i multiplicando el valor inmediatamente anterior por 1/2. Por tanto, las h_i consideradas resultan de multiplicar h por los elementos del vector [1,1/2,1/4,1/8,1/16,1/32,1/64,1/128].
Sin embargo, es posible considerar otras alternativas y tomar dos (o más) números diferentes, p.e., [1/2,1/6] para generar otro vector [1,1/2,1/12,1/24,1/144,1/288,1/1728,1/3456] y obtener una tabla que en general converge más rápidamente como la siguiente. Es necesario utilizar la fórmula general que aparece en primer lugar.

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON								
h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.60000000	**0.61257411**							
0.30000000	0.68068165	**0.74878918**						
5.000000e-02	0.76729722	0.78462034	**0.78787772**					
2.500000e-02	0.77858834	0.78987945	0.79035756	**0.79046538**				
4.166667e-03	0.78852129	0.79050788	0.79056501	0.79056794	**0.79056865**			
2.083333e-03	0.78954270	0.79056411	0.79056922	0.79056940	0.79056941	**0.79056941**		
3.472222e-04	0.79039792	0.79056897	0.79056941	0.79056941	0.79056942	0.79056942	**0.79056942**	
1.736111e-04	0.79048365	0.79056938	0.79056941	0.79056942	0.79056942	0.79056942	0.79056942	**0.79056942**

En este caso, la convergencia se produjo al calcular la linea 5, ya que $|T_5^5-T_4^4|=|.79056941207023214826-(.79056865411200552650)| = .75795822662176e-6 < .1e-3$

Mark summary:

Question	**Value**	**Your mark**
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.