

Derivación e integración

Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Obtener la derivada segunda de la función $f(x) = e^{-3x}$ en el punto 1.3 utilizando extrapolación de Richardson con la fórmula progresiva y comenzando con $h=0.3$. Dar el resultado con cuatro cifras decimales correctas. Entrar también con seis decimales correctos los valores solicitados de la tabla.

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.182 & 0.182 & 0.182 \end{bmatrix}$$

Solution:

Para estimar la derivada segunda usando tres puntos conocemos las fórmulas:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i h^{2i} \text{ (fórmula central, con error de truncamiento de la forma } h^{2i})$$

y también:

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i h^i \text{ (fórmula progresiva, con error de truncamiento de la forma } h^i)$$

y considerando la forma que tienen los errores de truncamiento de estas fórmulas que aproximan la derivada, podemos construir una tabla cuya primera columna T_0^i ($i=0,1,\dots$) se obtiene utilizando la primera fórmula o la segunda para diferentes h , y el resto de las columnas se pueden generar con la recurrencia:

$$T_k^i = \frac{(h_i/h_{i+k})^\beta T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{(h_i/h_{i+k})^\beta - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{(h_i/h_{i+k})^\beta - 1}, \text{ para } k=1,2,\dots \text{ (columna), } i=1,2,\dots \text{ (fila)}$$

siendo $\beta = 2,1$ respectivamente. Si es $h_0 = h$ y $h_{i+1} = h_i/2 \forall i \geq 0 = h_i/h_{i+k} = 2^k$ y resultan las conocidas fórmulas:

$$T_k^i = \frac{4^k T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{4^k - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{4^k - 1}, \text{ o bien } T_k^i = \frac{2^k T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{2^k - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{2^k - 1}$$

para las fórmulas central ($\beta = 2$) y progresiva ($\beta = 1$), respectivamente.

La tabla resultante en este caso es:

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON								
h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.30000000	0.07920425							
0.15000000	0.11813481	0.15706538						
7.500000e-02	0.14608620	0.17403758	0.17969498					
3.750000e-02	0.16296483	0.17984347	0.18177877	0.18207645				
1.875000e-02	0.17225803	0.18155122	0.18212048	0.18216929	0.18217548			
9.375000e-03	0.17713653	0.18201502	0.18216963	0.18217665	0.18217714	0.18217719		
4.687500e-03	0.17963623	0.18213592	0.18217622	0.18217717	0.18217720	0.18217720	0.18217720	
2.343750e-03	0.18090151	0.18216679	0.18217708	0.18217720	0.18217720	0.18217720	0.18217720	0.18217720

Siguiendo un criterio conservador para establecer la convergencia, esta se produjo al calcular la línea 4, ya que $|T_4^4 - T_3^3| = |.18217547941289010530 - (.18207645488745311913)| = .9902452543698617e-4 < .1e-3$

Esta tabla se ha construido partiendo del valor inicial $h_0 = h$ y obteniendo los siguientes h_i multiplicando el valor inmediatamente anterior por $1/2$. Por tanto, las h_i consideradas resultan de multiplicar h por los elementos del vector $[1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128]$.

Sin embargo, es posible considerar otras alternativas y tomar dos (o más) números diferentes, p.e., $[1/2, 2/3]$ para generar otro vector $[1, 1/2, 1/3, 1/6, 1/9, 1/18, 1/27, 1/54]$ y obtener una tabla que en general converge más rápidamente como la siguiente. Es necesario utilizar la fórmula general que aparece en primer lugar.

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON								
h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.30000000	0.07920425							
0.15000000	0.11813481	0.15706538						
0.10000000	0.13597543	0.17165667	0.17895232					
5.000000e-02	0.15709559	0.17821576	0.18149530	0.18200389				
3.333333e-02	0.16497816	0.18074330	0.18200707	0.18215329	0.18217197			
1.666667e-02	0.17332842	0.18167868	0.18214637	0.18217423	0.18217685	0.18217713		
1.111111e-02	0.17622104	0.18200628	0.18217007	0.18217685	0.18217717	0.18217720	0.18217720	
5.555556e-03	0.17917023	0.18211941	0.18217598	0.18217716	0.18217720	0.18217720	0.18217720	0.18217720

En este caso, la convergencia se produjo al calcular la línea 5, ya que $|T_5^5 - T_4^4| = |.18217713429897439544 - (.18217196785636521654)| = .516644260917890e-5 < .1e-3$



(cc) Jesús García Quesada 2011

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

[New Version](#) Click here to see a new version of this quiz.

[New Quiz](#) Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the [administrator](#).
Mathematical questions can be sent to the [teacher](#).