Derivación e integración

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Obtener la derivada segunda de la función $f(x) = e^{4x}$ en el punto -0.2 utilizando extrapolación de Richardson con la fórmula central y comenzando con h=0.5. Dar el resultado con cuatro cifras decimales correctas. Entrar también con seis decimales correctos los valores solicitados de la tabla.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 7.19 & 7.19 & 7.19 \end{bmatrix}$$

Solution:
Para estimar la derivada segunda usando tres puntos conocemos las fórmulas:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, h^{2i} \text{ (fórmula central, con error de truncamiento de la forma } h^{2i}\text{)}$$

y también:

$$f''(x) = \frac{f(x+2\,h) - 2\,f(x+h) + f(x)}{h^2} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i\, h^{i} \text{ (fórmula progresiva, con error de truncamiento de la forma } h^{i}\text{)}$$

y considerando la forma que tienen los errores de truncamiento de estas fórmulas que aproximan la derivada, podemos construir una tabla cuya primera columna T_0^i (i=0,1,...) se obtiene utilizando la primera fórmula o la segunda para diferentes h, y el resto de las columnas se pueden generar con la recurrencia:

$$T_k^i = \frac{(h_i/h_{i+k})^{\beta}\ T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{(h_i/h_{i+k})^{\beta} - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{(h_i/h_{i+k})^{\beta} - 1}, \quad \text{para } k=1,2,\ldots\text{(columna)}, \quad i=1,2,\ldots\text{(fila)}$$

siendo $\beta = 2,1$ respectivamente. Si es $h_0 = h$ y $h_{i+1}=h_i/2$ $\forall i \geq 0 \Rightarrow h_i/h_{i+k} = 2^k$ y resultan las conocidas fórmulas:

$$T_k^i = \frac{4^k\ T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{4^k - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{4^k - 1}, \text{ o bien } \quad T_k^i = \frac{2^k\ T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{2^k - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{2^k - 1}$$

para las fórmulas central ($\beta = 2$) y progresiva ($\beta = 1$), respectivamente.

La tabla resultante en este caso es:

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON								
h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.50000000	**9.92907623**							
0.25000000	7.80869949	**7.10190724**						
0.12500000	7.34029347	7.18415813	**7.18964152**					
6.250000e-02	7.22678560	7.18894965	7.18926908	**7.18926317**				
3.125000e-02	7.19862932	7.18924390	7.18926351	7.18926342	**7.18926343**			
1.562500e-02	7.19160399	7.18926221	7.18926343	7.18926343	7.18926343	**7.18926343**		
7.812500e-03	7.18984851	7.18926335	7.18926343	7.18926343	7.18926343	7.18926343	**7.18926343**	
3.906250e-03	7.18940969	7.18926342	7.18926343	7.18926343	7.18926343	7.18926343	7.18926343	**7.18926343**

Siguiendo un criterio conservador para establecer la convergencia, esta se produjo al calcular la linea 4, ya que $|T_4^4 - T_3^3| = |7.1892634259057332584 - (7.189263168025266919 2)| = .2578804663392e\text{-}6 < .1e\text{-}3$

Esta tabla se ha construido partiendo del valor inicial $h_0 = h$ y obteniendo los siguientes h_i multiplicando el valor inmediatamente anterior por 1/2. Por tanto, las h_i consideradas resultan de multiplicar h por los elementos del vector [1,1/2,1/4,1/8,1/16,1/32,1/64,1/128].
Sin embargo, es posible considerar otras alternativas y tomar dos (o más) números diferentes, p.e., [2/3,3/4] para generar otro vector [1,2/3,1/2,1/3,1/4,1/6,1/8,1/12] y obtener una tabla que en general converge más rápidamente como la siguiente. Es necesario utilizar la fórmula general que aparece en primer lugar.

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.50000000	**9.92907623**							
0.33333333	8.31949889	**7.03183703**						
0.25000000	7.80869949	7.15195740	**7.19199752**					
0.16666667	7.45950863	7.18015594	7.18955546	**7.18925020**				
0.12500000	7.34029347	7.18701684	7.18930380	7.18926262	**7.18926345**			
8.333333e-02	7.25607771	7.18870511	7.18926787	7.18926338	7.18926343	**7.18926343**		
6.250000e-02	7.22678560	7.18912431	7.18926405	7.18926342	7.18926343	7.18926343	**7.18926343**	
4.166667e-02	7.20592066	7.18922870	7.18926349	7.18926343	7.18926343	7.18926343	7.18926343	**7.18926343**

En este caso, la convergencia se produjo al calcular la linea 4, ya que $|T_4^4 - T_3^3| = |7.1892634505879992180 - (7.1892501985048452688)| = .132520831539492e-4 < .1e-3$

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.