Derivación e integración

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener la derivada primera de la función $f(x) = 2^x$ en el punto 1.1 utilizando extrapolación de Richardson con la fórmula progresiva y comenzando con h=0.6. Dar el resultado con cuatro cifras decimales correctas. Entrar también con seis decimales correctos los valores solicitados de la tabla.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1.49 & 1.49 & 1.49 \end{bmatrix}$$

Solution:
Para estimar la derivada primera usando dos puntos conocemos las fórmulas:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i h^{2i} \text{ (fórmula central, con error de truncamiento de la forma } h^{2i}\text{)}$$

y también:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i h^{i} \text{ (fórmula progresiva, con error de truncamiento de la forma } h^{i}\text{)}$$

y considerando la forma que tienen los errores de truncamiento de estas fórmulas que aproximan la derivada, podemos construir una tabla cuya primera columna T_0^i (i=0,1,...) se obtiene utilizando la primera fórmula o la segunda para diferentes h, y el resto de las columnas se pueden generar con la recurrencia:

$$T_k^i = \frac{(h_i/h_{i+k})^\beta \, T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{(h_i/h_{i+k})^\beta - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{(h_i/h_{i+k})^\beta - 1}, \quad \text{para k=1,2, ...(columna),} \quad \text{i=1,2, ...(fila)}$$

siendo $\beta = 2,1$ respectivamente. Si es $h_0 = h$ y $h_{i+1}=h_i/2$ $\forall i \geq 0 \Rightarrow h_i/h_{i+k} = 2^k$ y resultan las conocidas fórmulas:

$$T_k^i = \frac{4^k \, T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{4^k - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{4^k - 1}, \text{ o bien } \quad T_k^i = \frac{2^k \, T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{2^k - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{2^k - 1}$$

para las fórmulas central ($\beta = 2$) y progresiva ($\beta = 1$), respectivamente.

La tabla resultante en este caso es:

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON								
h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.60000000	**1.84243777**							
0.30000000	1.65156299	**1.46068821**						
0.15000000	1.56578203	1.48000108	**1.48643870**					
7.500000e-02	1.52509179	1.48440155	1.48586838	**1.48578691**				
3.750000e-02	1.50527204	1.48545229	1.48580253	1.48579312	**1.48579354**			
1.875000e-02	1.49549054	1.48570903	1.48579461	1.48579348	1.48579351	**1.48579351**		
9.375000e-03	1.49063151	1.48577249	1.48579364	1.48579351	1.48579351	1.48579351	**1.48579351**	
4.687500e-03	1.48820989	1.48578827	1.48579352	1.48579351	1.48579351	1.48579351	1.48579351	**1.48579351**

Siguiendo un criterio conservador para establecer la convergencia, esta se produjo al calcular la linea 4, ya que
$|T_4^4-T_3^3|=|1.4857935356791403417 - (1.4857869063691892479)| = .66293099510938e-5 < .1e-3$

Esta tabla se ha construido partiendo del valor inicial h_0 = h y obteniendo los siguientes h_i multiplicando el valor inmediatamente anterior por 1/2. Por tanto, las h_i consideradas resultan de multiplicar h por los elementos del vector [1,1/2,1/4,1/8,1/16,1/32,1/64,1/128].
Sin embargo, es posible considerar otras alternativas y tomar dos (o más) números diferentes, p.e., [2/5,3/4] para generar otro vector [1,2/5,3/10,3/25,9/100,9/250,[27/1000],[27/2500]] y obtener una tabla que en general converge más rápidamente como la siguiente. Es necesario utilizar la fórmula general que aparece en primer lugar.

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.60000000	**1.84243777**							
0.24000000	1.61652610	**1.46591831**						
0.18000000	1.58246024	1.48026269	**1.48641027**					
7.200000e-02	1.52349350	1.48418234	1.48586219	**1.48578745**				
5.400000e-02	1.51395030	1.48532070	1.48580856	1.48579300	**1.48579354**			
2.160000e-02	1.49697186	1.48565290	1.48579527	1.48579346	1.48579351	**1.48579351**		
1.620000e-02	1.49416680	1.48575160	1.48579390	1.48579350	1.48579351	1.48579351	**1.48579351**	
6.480000e-03	1.48913530	1.48578097	1.48579355	1.48579351	1.48579351	1.48579351	1.48579351	**1.48579351**

En este caso, la convergencia se produjo al calcular la linea 4, ya que $|T_4^4 - T_3^3|$=|1.4857935448291451140 - (1.4857874474136373778)| = .60974155077362e-5 < .1e-3

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.