

Derivación e integración

Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Obtener la derivada primera de la función $f(x) = -\sin(2x)$ en el punto 1.9 utilizando extrapolación de Richardson con la fórmula central y comenzando con $h=0.9$. Dar el resultado con cuatro cifras decimales correctas. Entrar también con seis decimales correctos los valores solicitados de la tabla.

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1.58 & 1.58 & 1.58 \end{bmatrix}$$

Solution:

Para estimar la derivada primera usando dos puntos conocemos las fórmulas:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i h^{2i} \text{ (fórmula central, con error de truncamiento de la forma } h^{2i}\text{)}$$

y también:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i h^i \text{ (fórmula progresiva, con error de truncamiento de la forma } h^i\text{)}$$

y considerando la forma que tienen los errores de truncamiento de estas fórmulas que aproximan la derivada, podemos construir una tabla cuya primera columna T_0^i ($i=0,1,\dots$) se obtiene utilizando la primera fórmula o la segunda para diferentes h , y el resto de las columnas se pueden generar con la recurrencia:

$$T_k^i = \frac{(h_i/h_{i+k})^\beta T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{(h_i/h_{i+k})^\beta - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{(h_i/h_{i+k})^\beta - 1}, \text{ para } k=1,2,\dots \text{ (columna), } i=1,2,\dots \text{ (fila)}$$

siendo $\beta = 2,1$ respectivamente. Si es $h_0 = h$ y $h_{i+1} = h_i/2 \forall i \geq 0 \Rightarrow h_i/h_{i+k} = 2^k$ y resultan las conocidas fórmulas:

$$T_k^i = \frac{4^k T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{4^k - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{4^k - 1}, \text{ o bien } T_k^i = \frac{2^k T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{2^k - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^i}{2^k - 1}$$

para las fórmulas central ($\beta = 2$) y progresiva ($\beta = 1$), respectivamente.

La tabla resultante en este caso es:

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON								
h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.90000000	0.85586892							
0.45000000	1.37685843	1.55052160						
0.22500000	1.52908308	1.57982463	1.58177817					
0.11250000	1.56862159	1.58180109	1.58193286	1.58193531				
5.625000e-02	1.57860064	1.58192699	1.58193538	1.58193542	1.58193542			
2.812500e-02	1.58110133	1.58193490	1.58193542	1.58193542	1.58193542	1.58193542		
1.406250e-02	1.58172688	1.58193539	1.58193542	1.58193542	1.58193542	1.58193542	1.58193542	
7.031250e-03	1.58188329	1.58193542	1.58193542	1.58193542	1.58193542	1.58193542	1.58193542	1.58193542

Siguiendo un criterio conservador para establecer la convergencia, esta se produjo al calcular la línea 4, ya que $|T_4^4 - T_3^3| = |1.5819354238157061187 - (1.5819353110311027350)| = .1127846033837e-6 < .1e-3$

Esta tabla se ha construido partiendo del valor inicial $h_0 = h$ y obteniendo los siguientes h_i multiplicando el valor

inmediatamente anterior por 1/2. Por tanto, las h_i consideradas resultan de multiplicar h por los elementos del vector [1,1/2,1/4,1/8,1/16,1/32,1/64,1/128].

Sin embargo, es posible considerar otras alternativas y tomar dos (o más) números diferentes, p.e., [1/6,3/5] para generar otro vector [1,1/6,1/10,1/60,1/100,1/600,1/1000,1/6000] y obtener una tabla que en general converge más rápidamente como la siguiente. Es necesario utilizar la fórmula general que aparece en primer lugar.

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON								
h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.90000000	0.85586892							
0.15000000	1.55831294	1.57838277						
9.000000e-02	1.57340680	1.58189709	1.58193259					
1.500000e-02	1.58169814	1.58193504	1.58193542	1.58193542				
9.000000e-03	1.58185000	1.58193542	1.58193542	1.58193542	1.58193542			
1.500000e-03	1.58193305	1.58193542	1.58193542	1.58193542	1.58193542	1.58193542		
9.000000e-04	1.58193457	1.58193542	1.58193542	1.58193542	1.58193542	1.58193542	1.58193542	
1.500000e-04	1.58193540	1.58193542	1.58193542	1.58193542	1.58193542	1.58193542	1.58193542	1.58193542

En este caso, la convergencia se produjo al calcular la línea 3, ya que $|T_3^3 - T_2^2| = |1.5819354237928754320 - (1.5819325928643911903)| = .28309284842417e-5 < .1e-3$



(cc) Jesús García Quesada 2011

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

[New Version](#) Click here to see a new version of this quiz.

[New Quiz](#) Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the [administrator](#).
Mathematical questions can be sent to the [teacher](#).