# Derivación e integración

**Question 1**

Top 1 Bottom Focus Help

Obtener la derivada segunda de la función f(x) = cos( 4 x ) en el punto 1.3 utilizando extrapolación de Richardson con la fórmula central y comenzando con h=0.6. Dar el resultado con cuatro cifras decimales correctas. Entrar también con seis decimales correctos los valores solicitados de la tabla.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} -7.50 & -7.50 & -7.50 \end{bmatrix}$$

**Solution:**
Para estimar la derivada segunda usando tres puntos conocemos las fórmulas:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, h^{2i} \text{ (fórmula central, con error de truncamiento de la forma } h^{2i})$$

y también:

$$f''(x) = \frac{f(x+2\,h) - 2\,f(x+h) + f(x)}{h^2} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i\, h^{i} \text{ (fórmula progresiva, con error de truncamiento de la forma } h^{i})$$

y considerando la forma que tienen los errores de truncamiento de estas fórmulas que aproximan la derivada, podemos construir una tabla cuya primera columna $T_0^i$ (i=0,1,...) se obtiene utilizando la primera fórmula o la segunda para diferentes h, y el resto de las columnas se pueden generar con la recurrencia:

$$T_k^i = \frac{(h_i/h_{i+k})^\beta \;\; T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{(h_i/h_{i+k})^\beta - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{(h_i/h_{i+k})^\beta - 1}, \quad \text{para } k=1,2, \ldots\text{(columna)}, \quad i=1,2, \ldots\text{(fila)}$$

siendo $\beta$ = 2,1 respectivamente. Si es $h_0 = h$ y $h_{i+1}=h_i/2$ $\forall i \geq 0 \Rightarrow h_i/h_{i+k} = 2^k$ y resultan las conocidas fórmulas:

$$T_k^i = \frac{4^k \;\; T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{4^k - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{4^k - 1}, \text{ o bien } \quad T_k^i = \frac{2^k \;\; T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{2^k - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{2^k - 1}$$

para las fórmulas central ($\beta$ = 2) y progresiva ($\beta$ = 1), respectivamente.

La tabla resultante en este caso es:

| EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h | $T_0^i$ | $T_1^i$ | $T_2^i$ | $T_3^i$ | $T_4^i$ | $T_5^i$ | $T_6^i$ | $T_7^i$ |
| 0.60000000 | **-4.52221067** | | | | | | | |
| 0.30000000 | -6.63880050 | **-7.34433044** | | | | | | |
| 0.15000000 | -7.27406012 | -7.48581332 | **-7.49524551** | | | | | |
| 7.500000e-02 | -7.44021314 | -7.49559748 | -7.49624975 | **-7.49626569** | | | | |
| 3.750000e-02 | -7.48222178 | -7.49622466 | -7.49626647 | -7.49626674 | **-7.49626674** | | | |
| 1.875000e-02 | -7.49275352 | -7.49626411 | -7.49626674 | -7.49626674 | -7.49626674 | **-7.49626674** | | |
| 9.375000e-03 | -7.49538831 | -7.49626658 | -7.49626674 | -7.49626674 | -7.49626674 | -7.49626674 | **-7.49626674** | |
| 4.687500e-03 | -7.49604713 | -7.49626673 | -7.49626674 | -7.49626674 | -7.49626674 | -7.49626674 | -7.49626674 | **-7.49626674** |

Siguiendo un criterio conservador para establecer la convergencia, esta se produjo al calcular la linea 4, ya que $|T_4^4 - T_3^3| = |-7.4962667406245530008 - (-7.4962656927307984752)| = .10478937545256e-5 < .1e-3$

Esta tabla se ha construido partiendo del valor inicial $h_0$ = h y obteniendo los siguientes $h_i$ multiplicando el valor

inmediatamente anterior por 1/2. Por tanto, las $h_i$ consideradas resultan de multiplicar h por los elementos del vector [1,1/2,1/4,1/8,1/16,1/32,1/64,1/128].
Sin embargo, es posible considerar otras alternativas y tomar dos (o más) números diferentes, p.e., [2/5,3/5] para generar otro vector [1,2/5,6/25,12/125,[36/625],[72/3125],[216/15625],[432/78125]] y obtener una tabla que en general converge más rápidamente como la siguiente. Es necesario utilizar la fórmula general que aparece en primer lugar.

| **EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON** | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h | $T_0^i$ | $T_1^i$ | $T_2^i$ | $T_3^i$ | $T_4^i$ | $T_5^i$ | $T_6^i$ | $T_7^i$ |
| 0.60000000 | **-4.52221067** | | | | | | | |
| 0.24000000 | -6.93795127 | **-7.39809233** | | | | | | |
| 0.14400000 | -7.29128852 | -7.49004073 | **-7.49566066** | | | | | |
| 5.760000e-02 | -7.46316428 | -7.49590252 | -7.49626079 | **-7.49626637** | | | | |
| 3.456000e-02 | -7.48433635 | -7.49624564 | -7.49626662 | -7.49626674 | **-7.49626674** | | | |
| 1.382400e-02 | -7.49435686 | -7.49626552 | -7.49626674 | -7.49626674 | -7.49626674 | **-7.49626674** | | |
| 8.294400e-03 | -7.49557914 | -7.49626667 | -7.49626674 | -7.49626674 | -7.49626674 | -7.49626674 | **-7.49626674** | |
| 3.317760e-03 | -7.49615672 | -7.49626674 | -7.49626674 | -7.49626674 | -7.49626674 | -7.49626674 | -7.49626674 | **-7.49626674** |

En este caso, la convergencia se produjo al calcular la linea 4, ya que $|T_4^4-T_3^3|$=|-7.4962667407522337773 - (-7.4962663745581083998)| = .3661941253775e-6 < .1e-3



**Mark summary:**

| **Question** | **Value** | **Your mark** |
|---|---|---|
| 1 | 3.00 | - |
| Total | 3.00 | 0.00 |

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.