Derivación e integración

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Obtener la derivada primera de la función f(x) = sin(6 π x) en el punto 1.4 utilizando extrapolación de Richardson con la fórmula central y comenzando con h=0.3. Dar el resultado con cuatro cifras decimales correctas. Entrar también con seis decimales correctos los valores solicitados de la tabla.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 5.82 & 5.82 & 5.82 \end{bmatrix}$$

Solution:

Para estimar la derivada primera usando dos puntos conocemos las fórmulas:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i h^{2i} \text{ (fórmula central, con error de truncamiento de la forma } h^{2i}\text{)}$$

y también:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i h^{i} \text{ (fórmula progresiva, con error de truncamiento de la forma } h^{i}\text{)}$$

y considerando la forma que tienen los errores de truncamiento de estas fórmulas que aproximan la derivada, podemos construir una tabla cuya primera columna T_0^i (i=0,1,...) se obtiene utilizando la primera fórmula o la segunda para diferentes h, y el resto de las columnas se pueden generar con la recurrencia:

$$T_k^i = \frac{(h_i/h_{i+k})^{\beta}\; T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{(h_i/h_{i+k})^{\beta} - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{(h_i/h_{i+k})^{\beta} - 1}, \quad \text{para k=1,2, ...(columna),} \quad \text{i=1,2, ...(fila)}$$

siendo β = 2,1 respectivamente. Si es $h_0 = h$ y $h_{i+1}=h_i/2$ $\forall i \geq 0 \Rightarrow h_i/h_{i+k} = 2^k$ y resultan las conocidas fórmulas:

$$T_k^i = \frac{4^k\; T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{4^k - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{4^k - 1}, \text{ o bien } \quad T_k^i = \frac{2^k\; T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{2^k - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{2^k - 1}$$

para las fórmulas central (β = 2) y progresiva (β = 1), respectivamente.

La tabla resultante en este caso es:

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON								
h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.30000000	**-0.60545211**							
0.15000000	0.63661002	**1.05063073**						
7.500000e-02	4.06949977	5.21379635	**5.49134072**					
3.750000e-02	5.35174624	5.77916173	5.81685275	**5.82201961**				
1.875000e-02	5.70432281	5.82184833	5.82469411	5.82481857	**5.82482955**			
9.375000e-03	5.79456406	5.82464447	5.82483088	5.82483306	5.82483311	**5.82483312**		
4.687500e-03	5.81725698	5.82482129	5.82483308	5.82483312	5.82483312	5.82483312	**5.82483312**	
2.343750e-03	5.82293853	5.82483238	5.82483312	5.82483312	5.82483312	5.82483312	5.82483312	**5.82483312**

Siguiendo un criterio conservador para establecer la convergencia, esta se produjo al calcular la linea 5, ya que
$|T_5^5 - T_4^4| = |5.8248331154123780118 - (5.8248295496862847949)| = .35657260932169e-5 < .1e-3$

Esta tabla se ha construido partiendo del valor inicial $h_0 = h$ y obteniendo los siguientes h_i multiplicando el valor

inmediatamente anterior por 1/2. Por tanto, las h_i consideradas resultan de multiplicar h por los elementos del vector [1,1/2,1/4,1/8,1/16,1/32,1/64,1/128].
Sin embargo, es posible considerar otras alternativas y tomar dos (o más) números diferentes, p.e., [1/2,1/6] para generar otro vector [1,1/2,1/12,1/24,1/144,1/288,1/1728,1/3456] y obtener una tabla que en general converge más rápidamente como la siguiente. Es necesario utilizar la fórmula general que aparece en primer lugar.

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON								
h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.30000000	**-0.60545211**							
0.15000000	0.63661002	**1.05063073**						
2.500000e-02	5.61163119	5.75377465	**5.78666377**					
1.250000e-02	5.77108678	5.82423864	5.82473139	**5.82479760**				
2.083333e-03	5.82333613	5.82482897	5.82483309	5.82483311	**5.82483312**			
1.041667e-03	5.82445885	5.82483309	5.82483312	5.82483312	5.82483312	**5.82483312**		
1.736111e-04	5.82482272	5.82483312	5.82483312	5.82483312	5.82483312	5.82483312	**5.82483312**	
8.680556e-05	5.82483052	5.82483312	5.82483312	5.82483312	5.82483312	5.82483312	5.82483312	**5.82483312**

En este caso, la convergencia se produjo al calcular la linea 4, ya que $|T_4^4-T_3^3|$=|5.8248331156240559971 - (5.8247975972112407497)| = .355184128152474e-4 < .1e-3

Mark summary:

Question	**Value**	**Your mark**
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.