Derivacion e integracion

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener el valor proporcionado por Gauss-Legendre de la integral de la función $f(x) = 4^x$ en el intervalo [1,4] utilizando 2 puntos.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

173.9

Solution:
La fórmula de integración de Gauss-Legendre usando n puntos es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} w_k\, f(x_k) + R_n$$

donde x_k es la k-ésima raíz del polinomio de Legendre de orden n, $P_n(x)$, y w_k el peso correspondiente a x_k, que se puede calcular por las fórmulas:

$$w_k = \frac{2}{(1-x_k^2)\ [P'_n(x_k)]^2} = \frac{2\,(1-x_k^2)}{(n+1)^2\,[P_{n+1}(x_k)]^2} = \frac{2}{n\,P_{n-1}(x_k)\,P'_n(x_k)}$$

ya que $(1-x^2)\,P'_n(x) = n\,[x\,P_n(x)-P_{n-1}(x)]$ [*]. El error que se comete es del orden de:

$$R_n = \frac{2^{2n+1}\,(n!)^4}{(2n+1)\,[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \qquad (-1 < \xi < 1)$$

Para un intervalo arbitrario [a,b] en lugar de [−1,1], debemos hacer el cambio de variable (dif. divididas):

$$\begin{array}{l} x = -1 \to z = a \\ \qquad \dfrac{(b-a)}{(1+1)} \Rightarrow z = a + \dfrac{b-a}{2}(x+1) = \dfrac{b-a}{2}x + \dfrac{b+a}{2} \Rightarrow dz = \dfrac{b-a}{2}dx \\ x = 1 \to z = b \end{array}$$

Por tanto, la fórmula para un intervalo arbitrario [a,b] usando n puntos es:

$$\int_a^b f(z)\,dz = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)}{2}x + \frac{b+a}{2}\right)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} w_k\, f\left(\frac{(b-a)}{2}x_k + \frac{b+a}{2}\right) + R_n$$

donde x_k es la k-ésima raiz de $P_n(x)$, y w_k el peso correspondiente a x_k, siendo el error que se comete del orden de

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1}\,(n!)^4}{(2n+1)\,[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \qquad (a < \xi < b)$$

El polinomio de Legendre de orden 2 es

$$P_2(x) = -1/2+3/2\,x^2$$

que tiene por raíces y pesos asociados a las raíces:

GAUSS-LEGENDRE, 2 puntos		
k	x_k	w_k
1	-0.5773502691896258	1.0000000000000000
2	0.5773502691896258	1.0000000000000000

Para obtener estos valores se pueden consultar las tablas preferidas (p.e. del Abramowitz-Stegun) o también usar Newton-Raphson para obtener las raíces x_k y alguna de las fórmulas anteriores para calcular los pesos, tal como se hace en la subrutina/procedimiento `gauleg` del libro *Numerical Recipes*. La aproximación inicial que utiliza la subrutina para calcular x_k es $\cos((\pi\,(k-0.25))/(n+0.5))$. Para calcular $P'_n(x)$ se usa la fórmula [*].

Por tanto, la estimación de la integral con este número de puntos es:

$$\int_1^4 4^x\,dx \approx \frac{4-1}{2}\sum_{k=1}^{2} w_k\, f\left(\frac{4-1}{2}x_k + \frac{4+1}{2}\right) = 3/2\sum_{k=1}^{2} w_k\, 4^{3/2\,x_k+5/2} = 173.9049998$$

siendo $f(x) = 4^x$. (I = 173.9049998119123803)

Como el valor máximo de la derivada 2n-ésima es

$$\max\ |f^{(2n)}(x)| = \max\ |f^{(4)}(x)| = \max\ |\,16\,4^x\,(\ln(2))^4| = 4096\,(\ln(2))^4$$

$x \in [a,b]$ $\quad$ $x \in [1,4]$ $\quad$ $x \in [1,4]$

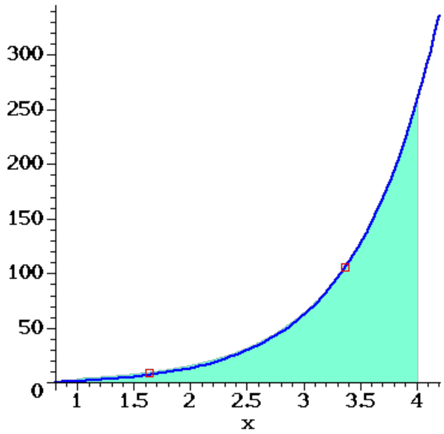
ya que su valor m'aximo se presenta en el punto x = 4., una cota superior del error cometido con 2 puntos es entonces:

$$|R_n| = \left| \frac{(b-a)^{2n+1}\,(n!)^4}{(2n+1)\,[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \right| \le \frac{1152}{5} \left(\ln(2) \right)^4 = 53.18440672$$

Y el error real cometido con 2 puntos al número de decimales considerado es:

$$|E_n| = |181.7795752 - (173.9049998)| = 7.8745754$$

Sigue una gráfica de la función, y el área determinada por la curva en el intervalo pedido. Aparecen con un cuadrado los diferentes puntos sobre la curva de f. Estos valores son los que se multiplican por sus pesos correspondientes, para realizar el cálculo de la integral.



Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.