

# Derivacion e integracion

**Question 1**

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Obtener el valor proporcionado por Gauss-Legendre de la integral de la función  $f(x) = 3^x$  en el intervalo  $[1,2]$  utilizando 5 puntos.

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

5.46

**Solution:**

La fórmula de integración de Gauss-Legendre usando  $n$  puntos es:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) + R_n$$

donde  $x_k$  es la  $k$ -ésima raíz del polinomio de Legendre de orden  $n$ ,  $P_n(x)$ , y  $w_k$  el peso correspondiente a  $x_k$ , que se puede calcular por las fórmulas:

$$w_k = \frac{2}{(1-x_k^2) [P'_n(x_k)]^2} = \frac{2(1-x_k^2)}{(n+1)^2 [P_{n+1}(x_k)]^2} = \frac{2}{n P_{n-1}(x_k) P'_n(x_k)}$$

ya que  $(1-x^2) P'_n(x) = n [x P_n(x) - P_{n-1}(x)]$  [\*]. El error que se comete es del orden de:

$$R_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \quad (-1 < \xi < 1)$$

Para un intervalo arbitrario  $[a,b]$  en lugar de  $[-1,1]$ , debemos hacer el cambio de variable (dif. divididas):

$$\begin{aligned} x = -1 \rightarrow z = a \\ \frac{(b-a)}{(1+1)} = z = a + \frac{b-a}{2} (x+1) = \frac{b-a}{2} x + \frac{b+a}{2} \Rightarrow dz = \frac{b-a}{2} dx \\ x = 1 \rightarrow z = b \end{aligned}$$

Por tanto, la fórmula para un intervalo arbitrario  $[a,b]$  usando  $n$  puntos es:

$$\int_a^b f(z) dz = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)}{2} x + \frac{b+a}{2}\right) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n w_k f\left(\frac{(b-a)}{2} x_k + \frac{b+a}{2}\right) + R_n$$

donde  $x_k$  es la  $k$ -ésima raíz de  $P_n(x)$ , y  $w_k$  el peso correspondiente a  $x_k$ , siendo el error que se comete del orden de

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \quad (a < \xi < b)$$

El polinomio de Legendre de orden 5 es

$$P_5(x) = 63/8 x^5 - 35/4 x^3 + 15/8 x$$

que tiene por raíces y pesos asociados a las raíces:

GAUSS-LEGENDRE, 5 puntos		
k	$x_k$	$w_k$
1	-0.9061798459386640	0.2369268850561891
2	-0.5384693101056831	0.4786286704993665
3	0.0000000000000000	0.5688888888888889
4	0.5384693101056831	0.4786286704993665
5	0.9061798459386640	0.2369268850561891

Para obtener estos valores se pueden consultar las tablas preferidas (p.e. del Abramowitz-Stegun) o también usar Newton-Raphson para obtener las raíces  $x_k$  y alguna de las fórmulas anteriores para calcular los pesos, tal como se hace en la subrutina/procedimiento `gauleg` del libro *Numerical Recipes*. La aproximación inicial que utiliza la subrutina para calcular  $x_k$  es  $\cos((\pi(k-0.25))/(n+0.5))$ . Para calcular  $P'_n(x)$  se usa la fórmula [\*].

Por tanto, la estimación de la integral con este número de puntos es:

$$\int_1^2 3^x dx \approx \frac{2-1}{2} \sum_{k=1}^5 w_k f\left(\frac{2-1}{2} x_k + \frac{2+1}{2}\right) = 1/2 \sum_{k=1}^5 w_k 3^{1/2 x_k + 3/2} = 5.46143536$$

siendo  $f(x) = 3^x$ . ( I = 5.4614353597557414)

Como el valor máximo de la derivada 2n-ésima es

$$\max_{x \in [a,b]} |f^{(2n)}(x)| = \max_{x \in [1,2]} |f^{(10)}(x)| = \max_{x \in [1,2]} |3^x (\ln(3))^{10}| = 9 (\ln(3))^{10}$$

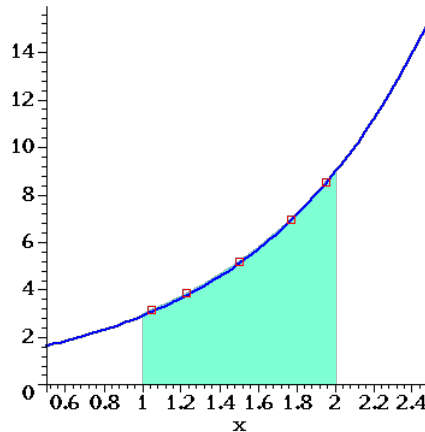
ya que su valor máximo se presenta en el punto  $x = 2$ , una cota superior del error cometido con 5 puntos es entonces:

$$|R_n| = \left| \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \right| \leq \frac{1}{281652940800} (\ln(3))^{10} = 9.9348253 \times 10^{-12}$$

Y el error real cometido con 5 puntos al número de decimales considerado es:

$$|E_n| = |5.46143536 - (5.46143536)| = 0.0$$

Sigue una gráfica de la función, y el área determinada por la curva en el intervalo pedido. Aparecen con un cuadrado los diferentes puntos sobre la curva de  $f$ . Estos valores son los que se multiplican por sus pesos correspondientes, para realizar el cálculo de la integral.



(cc) Jesus Garcia Quesada 2011

---

**Mark summary:**

Question	Value	Your mark
<a href="#">1</a>	3.00	-
Total	3.00	0.00

---

[New Version](#) Click here to see a new version of this quiz.

[New Quiz](#) Click here to select a new quiz.

---

If you have technical problems, you can send email to the [administrator](#).  
Mathematical questions can be sent to the [teacher](#).