

Derivacion e integracion

Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Obtener el valor proporcionado por Gauss-Legendre de la integral de la función $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$ en el intervalo $[1,3]$ utilizando 7 puntos.

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

-2.23

Solution:

La fórmula de integración de Gauss-Legendre usando n puntos es:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) + R_n$$

donde x_k es la k -ésima raíz del polinomio de Legendre de orden n , $P_n(x)$, y w_k el peso correspondiente a x_k , que se puede calcular por las fórmulas:

$$w_k = \frac{2}{(1-x_k^2) [P'_n(x_k)]^2} = \frac{2(1-x_k^2)}{(n+1)^2 [P_{n+1}(x_k)]^2} = \frac{2}{n P_{n-1}(x_k) P'_n(x_k)}$$

ya que $(1-x^2) P'_n(x) = n [x P_n(x) - P_{n-1}(x)]$ [*]. El error que se comete es del orden de:

$$R_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \quad (-1 < \xi < 1)$$

Para un intervalo arbitrario $[a,b]$ en lugar de $[-1,1]$, debemos hacer el cambio de variable (dif. divididas):

$$\begin{aligned} x = -1 \rightarrow z = a \\ \frac{(b-a)}{(1+1)} = z = a + \frac{b-a}{2} (x+1) = \frac{b-a}{2} x + \frac{b+a}{2} \Rightarrow dz = \frac{b-a}{2} dx \\ x = 1 \rightarrow z = b \end{aligned}$$

Por tanto, la fórmula para un intervalo arbitrario $[a,b]$ usando n puntos es:

$$\int_a^b f(z) dz = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)}{2} x + \frac{b+a}{2}\right) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n w_k f\left(\frac{(b-a)}{2} x_k + \frac{b+a}{2}\right) + R_n$$

donde x_k es la k -ésima raíz de $P_n(x)$, y w_k el peso correspondiente a x_k , siendo el error que se comete del orden de

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \quad (a < \xi < b)$$

El polinomio de Legendre de orden 7 es

$$P_7(x) = \frac{429}{16} x^7 - \frac{693}{16} x^5 + \frac{315}{16} x^3 - \frac{35}{16} x$$

que tiene por raíces y pesos asociados a las raíces:

| GAUSS-LEGENDRE, 7 puntos | | |
|--------------------------|---------------------|--------------------|
| k | x_k | w_k |
| 1 | -0.9491079123427585 | 0.1294849661688697 |
| 2 | -0.7415311855993944 | 0.2797053914892767 |
| 3 | -0.4058451513773972 | 0.3818300505051189 |
| 4 | 0.0000000000000000 | 0.4179591836734694 |
| 5 | 0.4058451513773972 | 0.3818300505051189 |
| 6 | 0.7415311855993944 | 0.2797053914892767 |
| 7 | 0.9491079123427585 | 0.1294849661688697 |

Para obtener estos valores se pueden consultar las tablas preferidas (p.e. del Abramowitz-Stegun) o también usar Newton-Raphson para obtener las raíces x_k y alguna de las fórmulas anteriores para calcular los pesos, tal como se hace en la subrutina/procedimiento `gauleg` del libro *Numerical Recipes*. La aproximación inicial que utiliza la subrutina para calcular x_k es $\cos((\pi(k-0.25))/(n+0.5))$. Para calcular $P'_n(x)$ se usa la fórmula [*].

Por tanto, la estimación de la integral con este número de puntos es:

$$\int_1^3 \cos(x) - \sin(x) \, dx \approx \frac{3-1}{2} \sum_{k=1}^7 w_k f\left(\frac{3-1}{2} x_k + \frac{3+1}{2}\right) = 1 \sum_{k=1}^7 w_k \cos(x_k+2) - \sin(x_k+2) = -2.230645779$$

siendo $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$. ($I = -2.2306457792166172$)

Como el valor máximo de la derivada 2n-ésima es

$$\max_{x \in [a,b]} |f^{(2n)}(x)| = \max_{x \in [1,3]} |f^{(14)}(x)| = \max_{x \in [1,3]} |-\cos(x) + \sin(x)| = \sqrt{2}$$

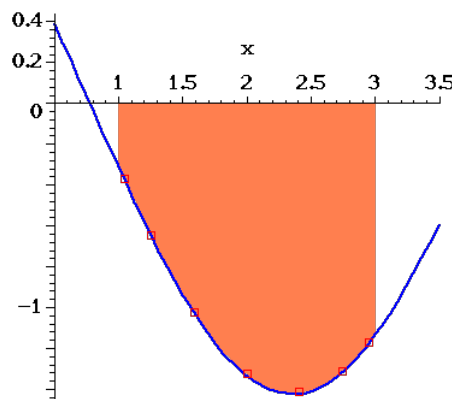
ya que su valor máximo se presenta en el punto $x = 2.3561944901923449289$, una cota superior del error cometido con 7 puntos es entonces:

$$|R_n| = \left| \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \right| \leq \frac{1}{470050192111500} \sqrt{2} = 3.8643727 \times 10^{-15}$$

Y el error real cometido con 7 puntos al número de decimales considerado es:

$$|E_n| = |-2.230645779 - (-2.230645779)| = 0.0$$

Sigue una gráfica de la función, y el área determinada por la curva en el intervalo pedido. Aparecen con un cuadrado los diferentes puntos sobre la curva de f . Estos valores son los que se multiplican por sus pesos correspondientes, para realizar el cálculo de la integral.



(cc) Jesus Garcia Quesada 2011

Mark summary:

| Question | Value | Your mark |
|-------------------|-------|-----------|
| 1 | 3.00 | - |
| Total | 3.00 | 0.00 |

[New Version](#) Click here to see a new version of this quiz.

[New Quiz](#) Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the [administrator](#).
 Mathematical questions can be sent to the [teacher](#).